不安定性とバブルのマクロ経済理論
― 標準理論から一歩踏み出す試み ―（上）

小　島　祥　一

目次

はじめに
1.　標準バブルと信用バブルのマクロ経済計算
2.　ラムゼー・モデルにおける不安定性とバブルの分析
3.　重複世代モデルにおける不安定性とバブルの分析
（以上、本号（上））
（以下、次号（下））
4.　3世代、T世代重複世代モデルへの拡張とラムゼー・モデルの再現
5.　連続時間モデルによる分析
おわりに
付録
参考文献

はじめに

バブル発生と拡大によるマクロ経済の急成長と、バブル崩壊後の長期低迷は、「失われた20年」の日本だけでなく、アメリカ、ヨーロッパをも「失われた10年」に引きずり込む、一般的な現象であることが分かってきた。マクロ経済の均衡状態は、実は不安定であり、バブルは発生し易く、必ず崩壊する。この厳然たる観測事実を説明するのがマクロ経済理論の役目だと思うが、これまで標準的なマクロ経済理論では、不安定性やバブルは特殊な現象として扱われ、あまり重視されなかった。

1980年代末のブランシャール・フィッシャー『マクロ経済学講義』は、第5章「複数均衡、バブル、安定性」において、不安定性やバブルの問題を本格的に取り上げた。しかし経済主体が合理的ならば、横断条件により、鞍点経路以外の不安定な動学経路は実現されないと考えた。また合理的なバブルが存在するのは、貨幣の導入の場合と同じく、重複世代モデルにおいて、経済が資本過剰で、動学的に非効率な場合に限るとし、いずれも特殊な現象という位置づけだった。

その約20年後、ブランシャール・フィッシャーの現代版を自認するウィッケンズ『マクロ経済理論』では、すでに1990年代末のITバブル発生・崩壊を経験しているにもかかわらず、不安定性の分析は、安定的な定常状態への外的ショックの分析に留まり、バブルの理論は株価の理論について簡単に触れるだけとなった。

確率的・動的計画法によるマクロ経済理論の

勝利を誇った 2004 年のリュンクヴィスト・サージェント『再帰的マクロ経済理論』第 2 版では、「バブルなき株価」の項で、合理的な経済主体は横断条件を満たすので、バブル項＝ゼロになるという標準理論を強調した。

入門書として定評のあるマンキュー『マクロ経済学』は、2010 年版において、2007 年に始まり現在進行中のアメリカの金融危機・経済危機についてはコラムで扱い、理論としては、確率的・動学的な一般均衡マクロ理論を強化し、バブルについては動学的非効率性を強調する扱いになっている。

マクロ経済学を学生に教える立場としては、標準的なマクロ経済理論は、いかにも現実離れで、とりすましたものに見える。

もともとバブルの理論は、投資家により異なる期待を持つ場合に株価が急騰し取引量が膨張するメカニズムを分析するハリソン・クレプスの株価のオプション理論と、経済主体がみな合理的な期待を持つ場合にも、本源的に無価値の資産が価値を持つことを重複世代モデルで分析するティロールの合理的バブルの理論があり、両者は分化して別系統に展開されている。本稿は、ティロールの合理的バブルの理論から出発を図る。

合理的バブルの理論の最先端において、2006 年のキャバレロ・ファーリ・ハムール『投機的成長：アメリカ経済からのヒント』、2011 年のファーリ・ティロール『バブル的流動性』は、企業の投資・貯蓄行動を 2 世代、3 世代重複世代モデルで分析しており、企業投資、企業金融に特化している。

とりすました標準理論と、分化し特化した最先端の理論の間には、現実に起こっているが、理論上軽視されてきた問題がたくさんある。不安定性とバブルを学生に教えられるようになるには、まず、これらの軽視されてきた問題を突っ込んで考えなければならない。

本稿では、不安定性とバブルについて、標準理論で当然と考えられてきた前提を緩め、一歩踏み出して考えるとどういう結果が出るか、分析を試みる。一歩踏み出すのは、次の点である。

（i）2 世代の重複世代モデルにおいて、標準モデルでは、若年期に働き消費し貯蓄し、老年期に退職し、貯蓄を取り崩して消費にあてる、というライフサイクルを前提としている。これを若年期、老年期とも働き消費し、若年期にはプラスの貯蓄をするが、老年期には引き続き労働所得を稼ぎ、かつ貯蓄を取り崩して消費にあてる、というライフサイクルを考える。すると若年期の消費が将来所得にも依存することになり、モデルがより複雑になる。効用関数が対数型 $u(c_t) = \log c_t$ で、生産関数が CES 型の場合に、動学的均衡である定常状態は複数均衡の可能性があり、均衡が不安定になる可能性が出てくる。

（ii）バブルの標準理論では、家計の貯蓄の一部が、体系外から供給される本源的に無価値の土地、住宅、設備、証券、絵画などのバブル購入に当てられ、資金が体系外に流出し、その分企業の投資が減る。その後バブルは体系内で取り引きされ、価値は金利で上昇する。だが現実のバブルでは、住宅バブルや IT バブルにみるように、銀行が家計に貸し付け、それを家計が企業に貸し付け、企業はその貸し付け資金を裏付けとして、これまで保有していた本源的に無価値であった資産に価値を持たせ有価値の資本設備とし、財・サービスを生産し、家計がそれを買う状況が起こる。この場合には、企業の投資は家計の貯蓄よりも大きくなる。これまで保有していた本源的に無価値の資産とは、マクロ経済モデル上では、前期までに消費済みの財と考えればよい。これが銀行の貸し付けにより有価値の資本設備になると考えるのである。

●　住宅バブルでは、銀行が家計に貸し付け、家計がそれを企業に貸し付けることにより、企

業はその貸し付け資金を裏づけとして、これまで保有していた本源的に無価値の造成宅地、木材、鉄骨、コンクリートの集まりを住宅産業の資本設備として価値あるものとし、家計はそこから供給される住宅サービスを購入し消費する。

持ち家の場合には、家計自身が企業になり、銀行が家計＝企業に貸し付け、企業＝家計が自らに住宅サービスを供給する、と解釈する。

● ITバブルでは、銀行が家計に貸し付け、家計がそれを企業に貸し付けることにより、企業はその貸し付け資金を裏づけとして、これまで保有していた本源的に無価値の電子部品やソフトウェアの集まりを IT 産業の資本設備として価値あるものとし、家計はそこから供給される IT 財・サービスを購入し消費する。

● さらに一般に、銀行が家計に貸し付け、家計がそれを企業に貸し付けることにより、企業はその貸し付け資金を裏づけとして、これまで保有していた本源的に無価値の不稼働資産を有価値の資本設備とし、家計はそこから供給される財・サービスを購入し消費する。

これらの状況は、銀行の本来の生産的貸し付けの姿でもある。本稿では、これをバブルにするため、銀行の家計への貸し付けが止まり、家計の企業への貸し付けが止まると、企業の有価値となっていた資本設備はまた無価値になってしまうとする。このため銀行が生み出した経済活動を持続させるためには、銀行は、今期の家計への貸し付けが次期に元利返済されると、その分また貸し付ける、追い貸し・借り換え・ロールオーバーを行うとする。すると家計の銀行借り入れは金利で膨らんでいき、標準バブルと同じになる。本稿ではこれを「信用バブル」と呼ぶ。「信用バブル」は標準バブルと異なり、家計の貯蓄にプラスして資金を供給することになるので、その分企業の投資が増えることになる。

その結果として、標準バブルでは、定常状態が鞍点であり、存在するのは動学的に非効率なときであるのに対し、「信用バブル」では、定常状態が渦状点または結節点であり、動学的に効率的なときに生ずるという結論が出る。

（iii）本源的に無価値な不換貨幣が価値を持つのはどういうときか、を分析する貨幣の理論がマクロ経済学の標準理論で重視されるのに対し、バブルの理論は軽視される。しかしバブルも本源的に無価値の資産であり、貨幣の理論はバブルに応用出来る。例えば、寿命無限の消費者が合理的であればバブルの価値はゼロというのがバブルの標準理論だが、これは寿命無限の消費者が合理的であれば不換貨幣の価値はゼロという貨幣の理論と同じである。

（iv）マクロ経済の標準理論では、寿命無限の消費者を前提とするラムゼー・モデルと、人生が若年期、老年期だけのライフサイクルを前提とする 2 世代重複世代モデルの両極端に分かれ、両者をつなぐ議論が少ない。そこで本稿では、両者をつなぐ議論を試みる。

まず、議論の大前提を確認しておく。①市場の均衡はすべて分権的なメカニズムによるものとする。つまり、中央計画当局の存在は前提しない。②家計の消費・貯蓄行動は完全予見とする。つまり家計は、生まれた時点で、将来にわたる金利、賃金率のあらゆる想定可能な系列に関して、生涯効用を最大化するためには、各時点でどのような消費・貯蓄行動をとるべきかを決定する。実際の市場における金利、賃金率は、このように行動する家計と企業、銀行の相互作用により動的な均衡として決まる。③将来についての想定は確定的とする。すなわち、家計の直面する経済環境について何らかの確率分布を与え、合理的期待のもとで生涯効用を最大化する定式化はとらない。④企業の資金調達は、銀行が家計の銀行預金ないし自己資金から貸し付

ける経路のみとし、企業の発行する株式を家計が保有する経路は省略する。モジリアニ・ミラーの定理により､資金調達を借り入れによるか、株式発行によるかの違いは、企業の投資行動に影響しないからである。

これらの大前提のもとで､ラムゼー･モデル、重複世代モデルの両者にまたがって分析を試みる。

● 3 世代重複世代モデルとして、若年期、中年期に働き消費し貯蓄し、老年期に退職し貯蓄を取り崩し消費する場合を考える。これから出る結論として、上記（i）のように、複数均衡、不安定性の可能性が出てくる。

● さらにこれを一般のT世代重複世代モデルに拡張する。複数均衡の可能性は出るが、不安定性の分析は次元が高くなると難しい。しかしTが大きい場合には、T世代すべてについて集計したマクロ変数の人口１人当たりの平均量の動きは、ラムゼー・モデルで近似されることが分かる。しかしこの１人当たりの平均量は代表的消費者１人の合理的な選択の結果という訳ではないので､横断条件が必ずしも成り立たない。よって、動学的経路は必ずしも鞍点経路をとらないことになる。

● 標準理論のラムゼー・モデルでは、代表的消費者１人が１つの特定の時間選好率を持つと前提するので、定常状態の均衡解が存在する。しかし消費者が、時間選好率が低く先憂後楽の消費者と、時間選好率が高く先楽後憂の消費者の２つのグループに分かれる場合は、時間選好率が異なる２人の代表的消費者がいることになるので、定常状態は存在しない。この場合を分析すると、動学的経路は循環することがあり得ることが分かる。

以下では、第１節で、ここで述べたような標準理論から一歩踏み出すやり方を、標準バブルと信用バブルのマクロ経済計算を中心に詳しく述べる。第２節、第３節では、ラムゼー・モデル、２ 世代重複世代モデルで一歩踏み出した場合に、定常状態の不安定性がどう生ずるか、バブルを入れるとどのような動学的影響が出るかを分析する。第４節では、これらの分析を３世代重複世代モデル、T 世代重複世代モデルに拡張し、３世代モデルでは２世代モデルと同様の結果が出ること、T が大きい場合には、ラムゼー・モデルで近似されるが必ずしも横断条件が成り立たないことを示す。以上は離散時間で分析するが、第５節では、連続時間で同様の分析を行う。

1. 標準バブルと信用バブルのマクロ経済計算

(1) マクロ経済計算と貯蓄・投資バランス
― バブルなしの場合 ―

(a) 経済成長論における定式化

離散時間 $t = 0,1,2,....$ のもとで、1財を生産する経済が、時間的に変化するようすを分析するのが、経済成長論である。時間の原点 $t = 0$ は適当に定めるので、$t = 0$ の期首にすでに資本 K_0 が $t = -1$ 期から継承されており、人口 N_0 が生きている。各 t 期の期中に、人口 N_t が資本 K_t を使って、時間によらない1次同次の生産関数 $F(K_t, N_t)$ により、財を Y_t 生産する。生産関数は凹関数とする。人口は増加率 n で増加するとし、

$$N_{t+1} = (1+n)N_t$$

となる。財の供給 Y_t に対して、財の需要は消費 C_t と投資 I_t が対応し、財市場が均衡する。Y_t は人口 N_t の所得となり、消費 C_t と貯蓄 S_t として処分される。よって貯蓄 S_t と投資 I_t はバランスする。所得 Y_t は、資本のレンタル所得 $r_t K_t$ と、人口の労働所得 $w_t N_t$ に分配される。r_t は資本のレンタル率、w_t は労働の賃金率である。つまり、

(1-1)　$Y_t = F(K_t, N_t) = r_t K_t + w_t N_t$

(1-2)　$Y_t = C_t + I_t = C_t + S_t$

(1-3)　$S_t = I_t$

$$r_t = \frac{\partial F(K_t, N_t)}{\partial K_t} > 0, \frac{\partial^2 F(K_t, N_t)}{\partial K_t^2} < 0,$$

(1-4)
$$w_t = \frac{\partial F(K_t, N_t)}{\partial N_t} > 0, \frac{\partial^2 F(K_t, N_t)}{\partial N_t^2} < 0,$$

$$w_t = F(\frac{K_t}{N_t}, 1) - \frac{\partial F(K_t, N_t)}{\partial K_t} \bullet \frac{K_t}{N_t}$$

t期首における資本K_tは、t期中の投資I_tが加わり、減価償却率δにより、δK_t目減りして、$t+1$期首の資本K_{t+1}になる。

$$K_{t+1} = K_t + I_t - \delta K_t$$

経済成長論では、議論の簡単化のために、減価償却後の生産関数$F(K_t, N_t) - \delta K_t$をあらためて$F(K_t, N_t)$と書き、$Y_t - \delta K_t, I_t - \delta K_t$, $S_t - \delta K_t, r_t - \delta$をあらためて、$Y_t, I_t, S_t, r_t$と書くと、上の式はそのまま維持され、資本蓄積の式は、

(1-5)　$K_{t+1} = K_t + I_t$

となる。レンタル率が減価償却率差し引き後なので、金利がマイナスになる可能性が出てくる。

マクロ経済計算の貯蓄・投資バランスは、金融市場において、家計の貯蓄はすべて銀行に預金され、銀行はその預金をすべて企業の生産的資本形成のために貸し付けるという、生産的貯蓄・投資を前提としている。家計の貯蓄S_tの時間的に蓄積されたものを家計の金融資産と呼び（ふつうは富wealthと呼ばれる）、t期首の金融資産をV_tとすると、

(1-6)　$V_{t+1} = V_t + S_t$

時間$t=0$の期首において、それまでの貯蓄がすべて企業の資本保有のために貸し付けられているとすると、$V_0 = K_0$であり、一般に

(1-7)　$V_t = K_t$

である。企業の資本はプラスなので、家計の金融資産もプラス、つまり家計の銀行預金残高はプラスで、銀行からの借り入れ超過にはならない、と前提されている。金融資産V_tを持つ家計の貯蓄S_tは、

(1-8)
$$S_t = Y_t - C_t = r_t K_t + w_t N_t - C_t$$
$$S_t = r_t V_t + w_t N_t - C_t$$

となり、金融資産に対する利子所得$r_t V_t$と労働所得$w_t N_t$から消費C_tした残りとなる。よって$t+1$期首の金融資産V_{t+1}、企業の資本K_{t+1}は次のようになる。

(1-9)　$V_{t+1} = (1 + r_t) V_t + w_t N_t - C_t$

(1-10)　$K_{t+1} = (1 + r_t) K_t + w_t N_t - C_t$

(1-9) 式は、家計の予算制約式として、

(1-11)　$C_t + V_{t+1} = w_t N_t + (1 + r_t) V_t$

と書くことが出来る。

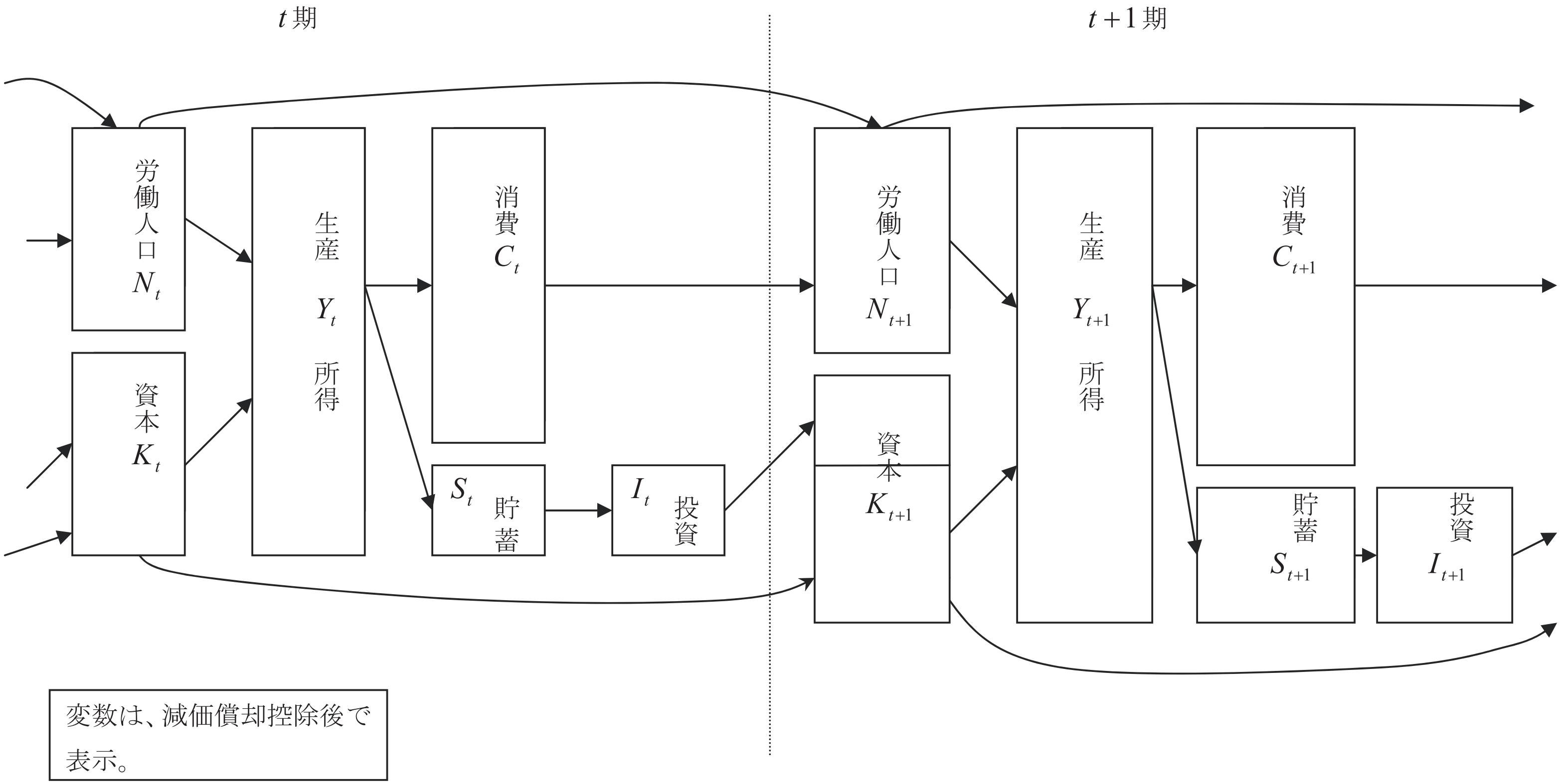
以上を図示すると図1-1のようになる。

経済成長論のラムゼー・モデルでは、家計はみな同じであり、1人の寿命無限の消費者が代表的消費者として、マクロの消費・貯蓄行動を決めるとしている。これはマクロの消費・貯蓄という集計量の人口平均である1人当たり消費・貯蓄があたかも1人の寿命無限の消費者の合理的選択によって決まったものであるという想定であり、横断条件により発散解が排除されることになる。しかし本稿では、標準理論から一歩踏み出し、T世代重複世代モデルの極限として現れるラムゼー・モデルでは、マクロの集計量の人口平均としての1人当たり消費・貯蓄には、横断条件を満たさなければならない先験的理由がないので、発散解は排除されないと主張する。

(b) 重複世代モデルにおける定式化

標準的な経済成長論では時間　$t = 0,1,2,....$は通常、年と解釈可能であり、人口N_tは各年の人口、消費C_tは人口の各人の各年の消費の合計、1人当たり消費$c_t = C_t / N_t$は寿命無限の1人の代表的消費者の各年の消費と考える。これに対し、重複世代モデル（OGモデル、Overlapping generations model）では、人は若年期と老年期

図1-1　経済成長のプロセス



の2期しか生きず、時間tの期首に生まれたt世代の人は、時間tに若年期、時間$t+1$に老年期を過ごし、$t+1$期末＝$t+2$期首に死ぬと考える。このため時間　$t=0,1,2,....$は、それぞれが人生の30年以上に当たる、長い時期をあらわすことになる。

t期の人口N_tは若世代N_{1t}と老世代N_{2t}からなり、各期の若世代は増加率nで増える。

$$N_t = N_{1t} + N_{2t}, N_{1,t+1} = (1+n)N_{1t},$$
$$N_{2,t+1} = N_{1t}$$

t期における消費C_tは、若世代の消費C_{1t}と老世代の消費C_{2t}からなる。

$$C_t = C_{1t} + C_{2t}$$

重複世代モデルのマクロ経済計算では、各人は若年期に働き、労働所得を稼ぎ、消費し、さらに銀行に貯蓄する。貯蓄は銀行から企業の投資のために貸し付けられ、企業はレンタル所得分を利子として銀行に支払う。各人は老年期には働かず、利子分増えた貯蓄を取り崩して消費に当てる。生産、財市場の均衡、所得分配、資本蓄積を表す式は、

（1-12）　$Y_t = F(K_t, N_{1t}) = r_t K_t + w_t N_{1t}$

（1-13）　$Y_t = C_{1t} + C_{2t} + I_t$

（1-14）　$K_{t+1} = K_t + I_t$

貯蓄・投資バランスは、若世代、老世代のトータルについて起こるので、以下に検討する。

t期中におけるマクロの家計貯蓄S_tは、若世代の貯蓄S_{1t}と老世代の貯蓄S_{2t}からなる。

$$S_t = S_{1t} + S_{2t}$$

若世代、老世代の予算制約式から、

（1-15）　$$\begin{aligned} C_{1t} + S_{1t} &= w_t N_{1t} \\ C_{2t} &= (1+r_t) S_{1,t-1} \end{aligned}$$

$t+1$期首のマクロの家計の金融資産V_{t+1}は、資本K_{t+1}に貸し付けられており、$t+1$期の老世代がt期の若世代の時に貯蓄したS_{1t}に等しい。

（1-16）　$V_{t+1} = K_{t+1} = S_{1t}$

よって、予算制約式は、次のようにも書ける。

（1-17）　$$\begin{aligned} C_{1t} + V_{t+1} &= w_t N_{1t} \\ C_{2t} &= (1+r_t) V_t \end{aligned}$$

老世代の貯蓄S_{2t}は、利子所得$r_t V_t$から、利子分も含めた貯蓄残高を取り崩して行う消費$C_{2t} = (1+r_t)V_t$を差し引いたものになる。

$S_{2t} = r_t V_t - C_{2t} = r_t V_t - (1+r_t)V_t = -V_t = -K_t$

よってt期のマクロの貯蓄・投資バランスは、

（1-18）　$S_t = S_{1t} + S_{2t} = K_{t+1} - K_t = I_t$

以上を図示すると図1-2のようになる。

本稿では、以上の標準理論の枠組みから一歩踏み出し、2世代重複世代モデルにおいて、若世代とともに老世代も働くとする。このとき労働人口は$N_t = N_{1t} + N_{2t}$であり、生産関数、所得分配は、

$$Y_t = F(K_t, N_t) = r_t K_t + w_t N_t$$

となる。老世代の貯蓄は

$$S_{2t} = r_t V_t + w_t N_{2t} - C_{2t}$$

となる。しかし生涯予算制約式

$$C_{1,t-1} + \frac{C_{2t}}{1+r_t} = w_{t-1} N_{1,t-1} + \frac{w_t N_{2t}}{1+r_t}$$

から、

$$\begin{aligned} w_t N_{2t} - C_{2t} &= (1+r_t)(C_{1,t-1} - w_{t-1} N_{1,t-1}) \\ &= -(1+r_t) V_t \end{aligned}$$

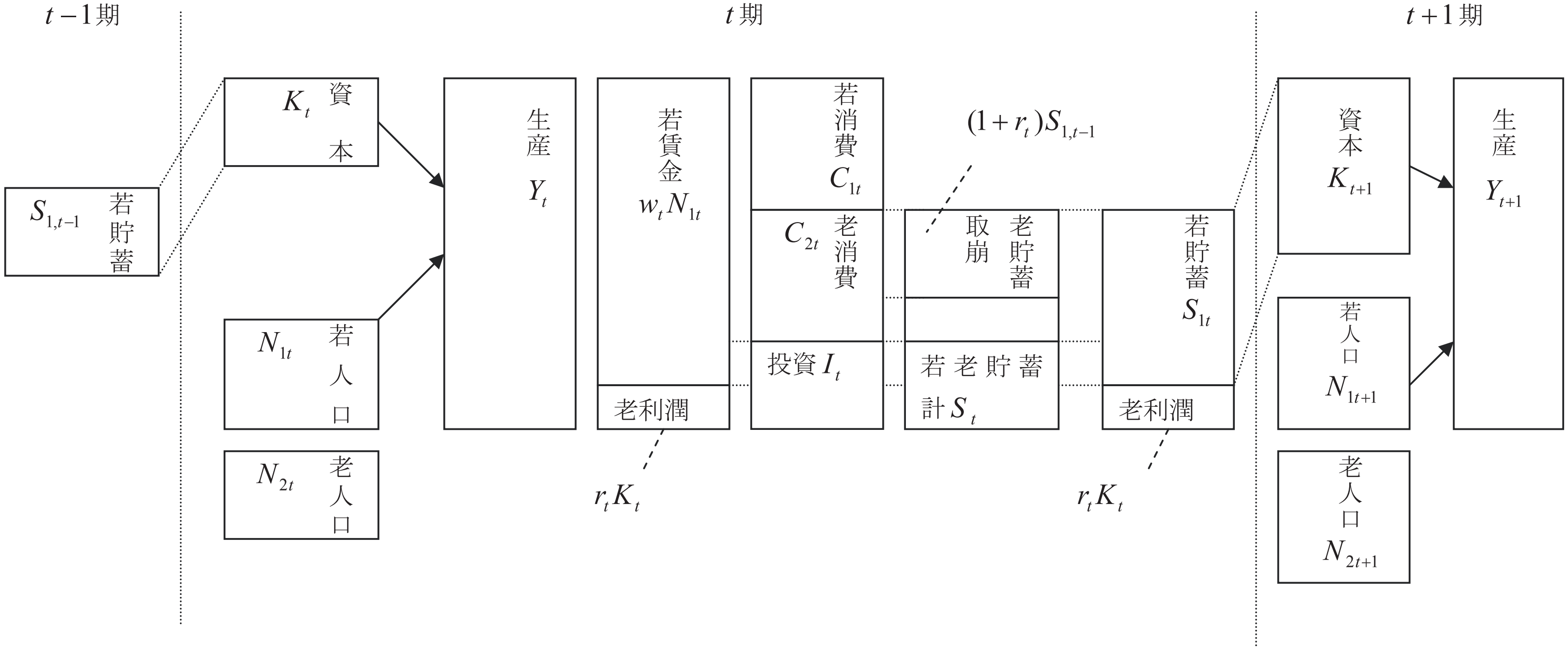
だから、$S_{2t} = -V_t = -K_t$となり、（1-18）式は依然成り立つ。

本稿では、この2世代重複世代モデルを3世代、T世代の重複世代モデルに拡張する。

(2) 標準バブルのマクロ経済計算

マクロ経済モデルにバブルを導入するには、1980年代前半にティロールが分析したように、合理的期待のもとでの投機的行動として考えるのが、標準的になっている。それによれば、寿命無限消費者を前提とする経済成長論においても、重複世代モデルにおいても、家計の金融資

図1-2　重複世代モデルにおける経済成長のプロセス



変数は減価償却控除後で表示。

産の運用先として、銀行を仲介として預金を企業の資本形成に貸し付けることに加えて、体系外から本源的に無価値の土地、住宅、証券、絵画等が供給され、それを消費者が有価値と見なして、金融資産の運用先に含めるとする。この本源的に無価値の土地、住宅、証券、絵画等を標準理論では、バブルと呼ぶ。本稿では、これを「標準バブル」と呼ぶことにする。

以下ではこの標準バブルの場合に、マクロ経済の変数の間の関係を示すマクロ経済計算はどうなっているか調べる。表現を明確にするため、バブルはある1時点でのみ、体系外のバブル発行元により、あるプラスの量 M だけ供給されるとし、その時点を時間　$t=0$ の原点にとる。これを財表示でプラスの価格 p_0 で家計が買うとする。バブルのプラスの価値は $B_0=Mp_0$ であり、その分家計の銀行への預金が減る。

(a) 寿命無限消費者の場合

寿命無限消費者を前提とする場合には、0期に寿命無限消費者が貯蓄の1部を使ってバブルを取得すると、1期以降は、バブルは全体としての寿命無限消費者の金融資産に留まるので、0期の経済計算が重要である。そこで、寿命無限消費者全体としての家計、銀行、企業、バブル発行元について、0期首における資産・負債、0期中の所得・支出、資産・負債の変動、0期末＝1期首における資産・負債の状況を図1-3と付表1-1で考える。

（第0期の動き）

0期首の家計の金融資産 V_0 はすべて銀行への預金残高 V_0^S であり、それは企業の資本 K_0 保有のための貸し付けになっている。

$$V_0=V_0^S=K_0$$

0期中において、家計は貯蓄 S_0 を銀行預金 S_0^S と、バブル購入 B_0 にあてる。

$$S_0=r_0V_0+w_0N_0-C_0=S_0^S+B_0$$

0期中の銀行預金 S_0^S は、企業の資本形成のための投資 I_0 に貸し付けられる。

$$S_0^S=I_0$$

よってマクロの貯蓄・投資バランスは、

$$S_0=I_0+B_0$$

これは、マクロの生産 Y_0、消費 C_0、投資 I_0 についての財市場の均衡が

$$Y_0=r_0K_0+w_0N_0=C_0+I_0+B_0$$

となることを意味する。つまりバブル購入 B_0 は、マクロ的には、政府が国債を発行して B_0 だけ財を購入して消費する場合や、この国が外国に貸し付けをして B_0 だけ輸出するのと同じ形になる。

0期末＝1期首の銀行預金残高 V_1^S、その貸し付け先である企業の資本 K_1 は、バブルの分だけ少なくなる。

$$\begin{aligned}V_1^S&=V_0^S+S_0^S=(1+r_0)V_0^S+w_0N_0-C_0-B_0\\&=K_1=K_0+I_0=(1+r_0)K_0+w_0N_0-C_0-B_0\end{aligned}$$

これを銀行預金残高の増分の形で書くと、

$$V_1^S-V_0^S=Y_0-C_0-B_0=S_0-B_0$$

予算制約式の形で書くと、

$$C_0+V_1^S+B_0=w_0N_0+(1+r_0)V_0^S$$

1期首のバブル残高は $V_1^B=B_0$ だから、家計の金融資産の全体は、

$$\begin{aligned}V_1&=V_1^S+V_1^B=V_1^S+B_0\\&=(1+r_0)V_0+w_0N_0-C_0\end{aligned}$$

これを金融資産の増分の形で書くと、

$$V_1-V_0=Y_0-C_0=S_0$$

予算制約式の形で書くと、

$$C_0+V_1=w_0N_0+(1+r_0)V_0$$

（第1期の動き）

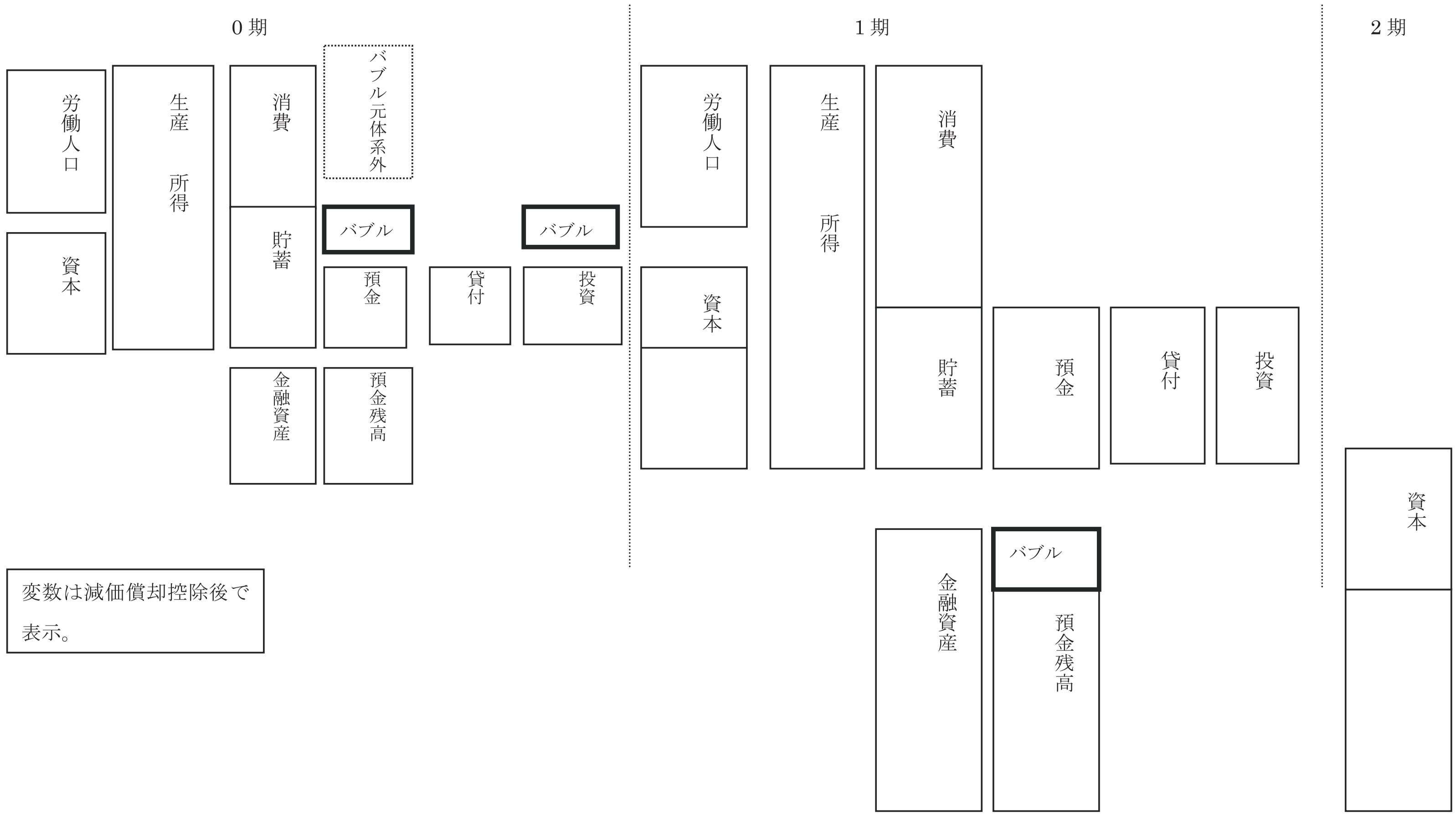
財表示のバブルの価格 p_1 は、他の金融資産つまり銀行預金を1期中保有すれば、金利 r_1 で価値が増えるので、これとの裁定の条件から、

$$p_1/p_0=1+r_1$$

よって1期中におけるバブルの価値は、

$$B_1=Mp_1=M(1+r_1)p_0=(1+r_1)B_0$$

図1-3　経済成長のプロセスと標準バブル：0期にバブル購入すると、1期以降、金利で膨らむ。資本形成はバブル購入分減る。



となる。

1期中の貯蓄はすべて銀行預金S_1^Sになり、それは企業の投資I_1に貸し付けられる。

$$S_1 = S_1^S = r_1 K_1 + w_1 N_1 - C_1 = I_1$$

（一般の第t期の動き）

それ以降同じなので、一般のt期の場合、マクロ変数の間の関係を示すマクロ経済計算は、次のようにまとめられる。

貯蓄・投資バランスは、

$$\begin{aligned} &S_t = S_t^S = r_t K_t + w_t N_t - C_t = I_t, \\ (1\text{-}19)\quad &t = 1,2,... \\ &S_0 = I_0 + B_0 \end{aligned}$$

マクロの生産、所得、支出の関係は、

$$\begin{aligned} &Y_t = F(K_t, N_t) = r_t K_t + w_t N_t \\ &= C_t + I_t, t = 1,2,... \\ (1\text{-}20)\quad &Y_0 = F(K_0, N_0) = r_0 K_0 + w_0 N_0 \\ &= C_0 + I_0 + B_0 \end{aligned}$$

$t+1$期首における銀行預金残高V_{t+1}^S、その貸し付け先である企業の資本K_{t+1}は、

$$\begin{aligned} &V_{t+1}^S = V_t^S + S_t^S = (1+r_t)V_t^S + w_t N_t - C_t, \\ (1\text{-}21)\quad &t = 1,2,... \\ &V_1^S = (1+r_0)V_0^S + w_0 N_0 - C_0 - B_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1\text{-}22)\quad &V_{t+1}^S = K_{t+1}, t = 0,1,2,... \\ &V_0^S = V_0 = K_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &K_{t+1} = K_t + I_t = (1+r_t)K_t + w_t N_t - C_t, \\ (1\text{-}23)\quad &t = 1,2,... \\ &K_1 = (1+r_0)K_0 + w_0 N_0 - C_0 - B_0 \end{aligned}$$

財表示のバブルの価格p_tは、裁定の条件により$p_t / p_{t-1} = 1 + r_t$だから、t期中のバブルの価値は、

$$\begin{aligned} B_t &= M p_t = (1+r_t) M p_{t-1} \\ &= (1+r_t) B_{t-1} > 0, t = 1,2,... \end{aligned}$$

$t+1$期首のバブル残高V_{t+1}^Bは、

$$\begin{aligned} (1\text{-}24)\quad V_{t+1}^B &= B_t = (1+r_t)B_{t-1} \\ &= (1+r_t)V_t^B, t = 1,2,... \end{aligned}$$

$t+1$期首の家計の金融資産全体V_{t+1}は、銀行預金残高V_{t+1}^Sとバブル残高V_{t+1}^Bの和であり、

$$\begin{aligned} (1\text{-}25)\quad V_{t+1} &= V_{t+1}^S + V_{t+1}^B \\ &= (1+r_t)V_t + w_t N_t - C_t, t = 0,1,2,... \end{aligned}$$

つまり、金融資産V_{t+1}は、企業の資本K_{t+1}保有のための貸し付けと、バブル保有B_tからなる。

$$(1\text{-}26)\quad V_{t+1} = K_{t+1} + B_t, t = 0,1,2,...$$

（1-21）式を銀行預金残高の増分の形で書くと、

$$\begin{aligned} &V_{t+1}^S - V_t^S = r_t V_t^S + w_t N_t - C_t \\ (1\text{-}27)\quad &= r_t K_t + w_t N_t - C_t = S_t, t = 1,2,... \\ &V_1^S - V_0^S = S_0 - B_0 \end{aligned}$$

予算制約式の形で書くと、

$$\begin{aligned} (1\text{-}28)\quad &C_t + V_{t+1}^S = w_t N_t + (1+r_t)V_t^S, t = 1,2,... \\ &C_0 + V_1^S + B_0 = w_0 N_0 + (1+r_0)V_0^S \end{aligned}$$

（1-25）式を家計の金融資産の増分の形で書くと、

$$\begin{aligned} &V_{t+1} - V_t = r_t V_t + w_t N_t - C_t \\ (1\text{-}29)\quad &= r_t K_t + w_t N_t - C_t + r_t B_{t-1} \\ &= S_t + (B_t - B_{t-1}), t = 1,2,... \\ &V_1 - V_0 = S_0 \end{aligned}$$

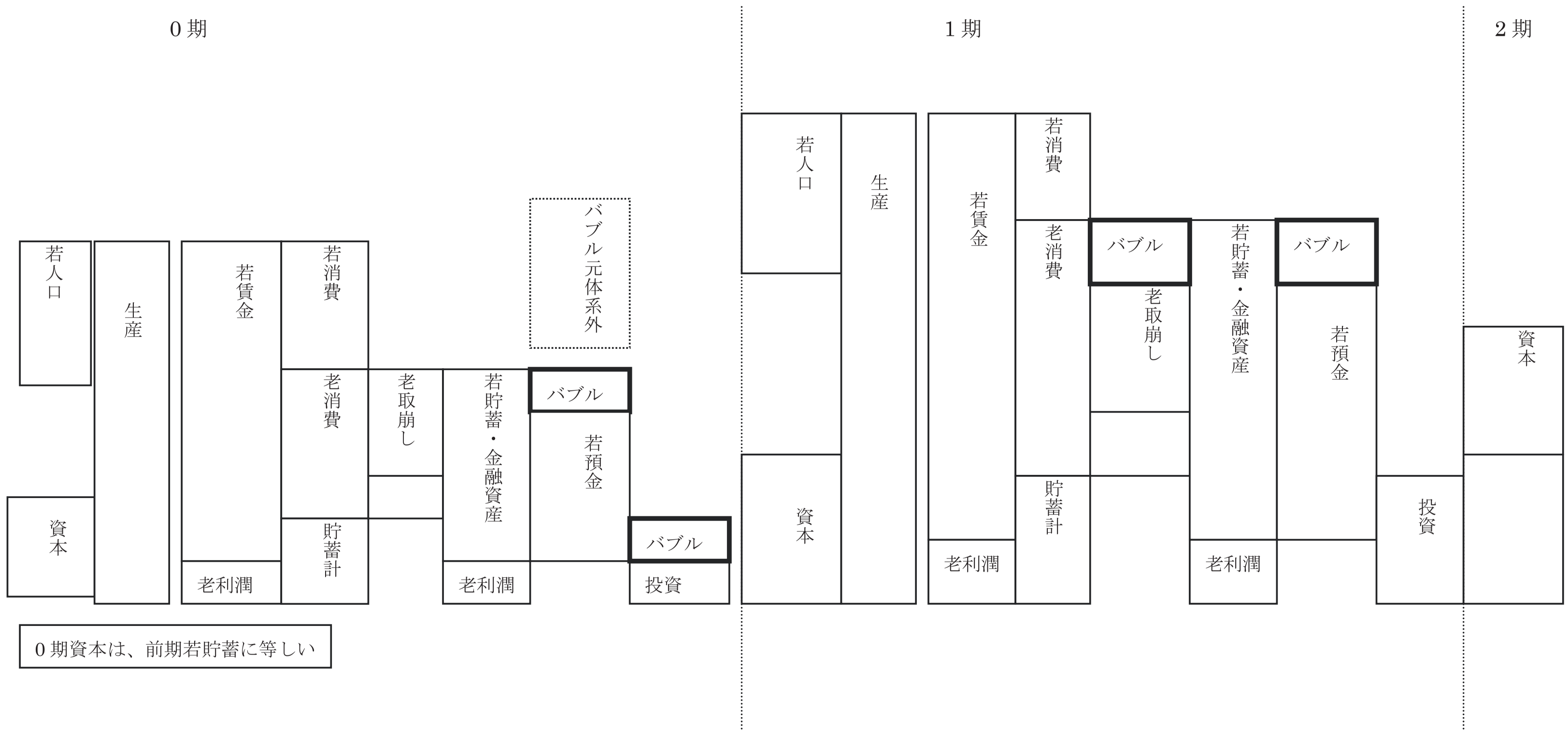
予算制約式の形に書くと

$$\begin{aligned} (1\text{-}30)\quad &C_t + V_{t+1} = w_t N_t + (1+r_t)V_t, \\ &t = 0,1,2,... \end{aligned}$$

（b）重複世代モデルの場合

寿命有限の消費者の場合は、合理的であり爆発しないプラスのバブルがあり得ることを、ティロールは重複世代モデルによって示した。これがマクロ経済理論におけるバブルの標準理論である。重複世代の消費者を若世代と老世代に分け、前述の重複世代モデルの変数表記を用い、寿命無限消費者の場合と同様にバブルを導入し、図1-4と付表1-2によりまず0期の経済計算を考える。

図1-4　重複世代モデルにおける経済成長のプロセスと標準バブル：0期に若世代がバブル購入、1期に老世代となり、次の若世代に売却



変数は、減価償却控除後で表示。
老人口は、図では省略。

（第0期の動き）

バブルは0期中に供給され、0期の若世代が買う。0期首の若世代の金融資産はゼロである。0期中の若世代の予算制約式は、労働所得 $w_0 N_{10}$、消費 C_{10}、貯蓄 S_{10} として、

$$C_{10} + S_{10} = w_0 N_{10}$$

貯蓄 S_{10} は、銀行預金 S_{10}^S とバブル購入 B_0 に向けられる。

$$S_{10} = S_{10}^S + B_0$$

0期首の老世代の金融資産 V_{20} は、マクロの金融資産 V_0 でもある。それはすべて銀行預金残高 V_{20}^S で、前期－1期の若年期に行った貯蓄 $S_{1,-1}$ であり、すべて企業の資本 K_0 の保有のために貸し付けられている。

$$V_0 = V_{20} = V_{20}^S = S_{1,-1} = K_0$$

0期中の老世代は、利子で増えた金融資産 $(1+r_0)V_0$ を取り崩して消費にあてる。所得はレンタル所得 $r_0 K_0$ であるから、老世代の貯蓄 S_{20} は、所得から消費を引いて、

$$S_{20} = r_0 K_0 - C_{20} = r_0 K_0 - (1+r_0)K_0 = -K_0$$

貯蓄 S_{20} はすべて銀行預金 S_{20}^S であり、銀行預金残高 V_{20}^S を取り崩したものである。これは貸し付け先である企業の資本保有分 K_0 を回収したものでもある。

$$S_{20} = S_{20}^S = -V_{20}^S = -K_0$$

よって、老世代の予算制約式は様々に表現され、

$$\begin{aligned} C_{20} &= (1+r_0)V_0 = (1+r_0)V_{20} = (1+r_0)V_{20}^S \\ &= (1+r_0)S_{1,-1} = -(1+r_0)S_{20} = -(1+r_0)S_{20}^S \\ &= (1+r_0)K_0 = K_0 + r_0 K_0 \end{aligned}$$

0期中に銀行預金は若世代が S_{10}^S 行い、老世代が取り崩し $-K_0$ を行うので、差し引き $S_{10}^S - K_0$ であり、それが企業の投資 $I_0 = K_1 - K_0$ に貸し付けられるので、

$$S_{10}^S - K_0 = K_1 - K_0$$

よって　$S_{10}^S = K_1$

つまり、0期中の若世代の銀行預金 S_{10}^S が、すべて企業の資本 K_1 の保有のための貸し付けになる。よって0期中の若世代の貯蓄 S_{10} は、1期首の企業の資本 K_1 への貸し付けと、0期中のバブル購入 $B_0 = Mp_0$ に向けられる。

$$S_{10} = K_1 + B_0$$

0期中のマクロの財市場の均衡をあらわす生産 Y_0 と所得、支出の関係は、

$$\begin{aligned} Y_0 &= F(K_0, N_{10}) = r_0 K_0 + w_0 N_{10} \\ &= (C_{20} - K_0) + (C_{10} + K_1 + B_0) \end{aligned}$$

つまり、マクロの生産 Y_0 は、両世代の消費 $C_{10} + C_{20}$、投資 $I_0 = K_1 - K_0$、バブル購入 B_0 に向けられて、財市場が均衡する。

$$Y_0 = C_{10} + C_{20} + I_0 + B_0$$

マクロの家計貯蓄 S_0 は、両世代の貯蓄の和であり、投資とバブル購入に向けられ、マクロの所得 Y_0 から両世代の消費を引いた残りである。

$$\begin{aligned} S_0 &= S_{10} + S_{20} = K_1 + B_0 - K_0 = I_0 + B_0 \\ &= r_0 K_0 + w_0 N_{10} - (C_{10} + C_{20}) \end{aligned}$$

資本蓄積の式は、

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 + I_0 = K_0 + Y_0 - C_{10} - C_{20} - B_0 \\ &= (1+r_0)K_0 + w_0 N_{10} - C_{10} - C_{20} - B_0 \end{aligned}$$

となり、バブル購入分だけ、資本蓄積は減る。

0期末=1期首において、老世代の金融資産 V_{21} はマクロの家計の金融資産 V_1 でもある。これは銀行預金残高 V_{21}^S とバブル残高 V_{21}^B からなり、0期の若世代として行った貯蓄 S_{10}、すなわち銀行預金 S_{10}^S ないし資本 K_1 とバブル購入 B_0 からなる。

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{21} = V_{21}^S + V_{21}^B \\ &= S_{10} = S_{10}^S + B_0 = K_1 + B_0 \\ &= (1+r_0)V_0 + w_0 N_{10} - C_{10} - C_{20} \end{aligned}$$

マクロの家計の銀行預金残高は、

$$\begin{aligned} V_1^S &= V_{21}^S = S_{10}^S \\ &= (1+r_0)V_0^S + w_0 N_{10} - C_{10} - C_{20} - B_0 \end{aligned}$$

金融資産を使うと、0期中の若世代、老世代

の予算制約式は、次のようにも書ける。

$$C_{10}+V_1=w_0N_{10}$$
$$C_{20}=(1+r_0)V_0$$

これらを統合すると、再び上の式が出る。

（第1期の動き）

1期首における若世代の金融資産はゼロである。1期中の若世代の予算制約式は、

$$C_{11}+S_{11}=w_1N_{11}$$

貯蓄 S_{11} は、前と同様に、2期首の企業の資本 K_2 保有のための貸し付けと、バブルの購入 B_1 に向けられる。

$$S_{11}=S_{11}^S+B_1=K_2+B_1$$

バブルの価値 $B_1=Mp_1$ は、裁定の条件から $p_1/p_0=1+r_1$ となるので、

$$B_1=(1+r_1)B_0$$

1期中の老世代の所得はレンタル所得 r_1K_1 である。金融資産は、銀行預金 $S_{10}^S=K_1$ は金利で膨らんで $(1+r_1)K_1$ になり、バブル B_0 は評価益 B_1-B_0 で膨らんで B_1 になる。消費 C_{21} はこれらの取り崩しであり、予算制約式は、

$$C_{21}=(1+r_1)K_1+B_1$$

貯蓄 S_{21} は、所得から消費を引いて

$$S_{21}=r_1K_1-C_{21}=-K_1-B_1$$

となる。マクロの生産、所得、支出の関係は

$$\begin{aligned}Y_1&=F(K_1,N_{11})=r_1K_1+w_1N_{11}\\&=(C_{21}-K_1-B_1)+(C_{11}+K_2+B_1)\\&=C_{11}+C_{21}+I_1\end{aligned}$$

となり、通常の関係式になる。マクロの貯蓄・投資バランスは

$$\begin{aligned}S_1&=S_{11}+S_{21}\\&=(K_2+B_1)-K_1-B_1=I_1\end{aligned}$$

（一般の第 t 期の動き）

以下同様なので、一般の t 期の場合、マクロ経済計算は次のようになる。

バブルは金利で増える。

（1-31）$B_{t+1}=(1+r_{t+1})B_t,B_t>0,$
$t=0,1,2,...$

若世代の予算制約式は、

$$C_{1t}+S_{1t}=w_tN_{1t},t=0,1,2,...$$

若世代の貯蓄 S_{1t} は、銀行預金 S_{1t}^S とバブル購入 B_t に向けられる。

$$S_{1t}=S_{1t}^S+B_t,t=0,1,2,...$$

老世代は、若世代の時の貯蓄が利子で増えたもの $(1+r_t)S_{1,t-1}^S$ と、評価増で膨らんだバブル B_t を取り崩して消費にあてるので、老世代の予算制約式は、

$$C_{2t}=(1+r_t)S_{1,t-1}^S+B_t,t=1,2,...$$
$$C_{20}=(1+r_0)S_{1,-1}^S$$

銀行預金 S_{1t}^S は、$t+1$ 期首のマクロの家計の銀行預金残高 V_{t+1}^S だから、若世代、老世代の予算制約式は、

（1-32）
$$\begin{aligned}&C_{1t}+V_{t+1}^S+B_t=w_tN_{1t},t=0,1,2,...\\&C_{2t}=(1+r_t)V_t^S+B_t,t=1,2,...\\&C_{20}=(1+r_0)V_0^S\end{aligned}$$

これを統合すると、

（1-33）
$$\begin{aligned}&V_{t+1}^S=(1+r_t)V_t^S+w_tN_{1t}-C_{1t}-C_{2t}\\&t=1,2,...\\&V_1^S=(1+r_0)V_0^S+w_0N_{10}-C_{10}-C_{20}-B_0\end{aligned}$$

家計の銀行預金残高 V_{t+1}^S は、企業の資本 K_{t+1} 保有のための貸し付けになっている。

（1-34）$V_{t+1}^S=S_{1t}^S=K_{t+1}$

よって、資本蓄積の式は、

（1-35）
$$\begin{aligned}&K_{t+1}=(1+r_t)K_t+w_tN_{1t}-C_{1t}-C_{2t},\\&t=1,2,...\\&K_1=(1+r_0)K_0+w_0N_{10}-C_{10}-C_{20}-B_0\end{aligned}$$

マクロの生産、所得、支出の関係は

（1-36）
$$\begin{aligned}&Y_t=F(K_t,N_{1t})=r_tK_t+w_tN_{1t}\\&=C_{1t}+C_{2t}+I_t,t=1,2,...\\&Y_0=F(K_0,N_{10})=r_0K_0+w_0N_{10}\\&=C_{10}+C_{20}+I_0+B_0\end{aligned}$$

マクロの貯蓄・投資バランスは、

$$(1\text{-}37)\quad \begin{aligned} &S_t = I_t, t = 1,2,... \\ &S_0 = I_0 + B_0 \end{aligned}$$

マクロの家計の金融資産 V_{t+1} は、銀行預金残高 V_{t+1}^S とバブル B_t の和だから、

$$(1\text{-}38)\quad \begin{aligned} &V_{t+1} = V_{t+1}^S + B_t = S_{1t}^S + B_t = S_{1t} = K_{t+1} + B_t \\ &= (1+r_t)V_t + w_t N_{1t} - C_{1t} - C_{2t}, t = 0,1,2,... \end{aligned}$$

（1-33）式を銀行預金残高の増分の形で書くと、

$$(1\text{-}39)\quad \begin{aligned} &V_{t+1}^S - V_t^S = r_t V_t^S + w_t N_{1t} - C_{1t} - C_{2t} = S_t, \\ &t = 1,2,... \\ &V_1^S - V_0^S = r_0 V_0^S + w_0 N_{10} - C_{10} - C_{20} - B_0 \\ &= S_0 - B_0 \end{aligned}$$

予算制約式の形で書くと、

$$(1\text{-}40)\quad \begin{aligned} &C_{1t} + C_{2t} + V_{t+1}^S = w_t N_{1t} + (1+r_t)V_t^S \\ &t = 1,2,... \\ &C_{10} + C_{20} + V_1^S + B_0 = w_0 N_{10} + (1+r_0)V_0^S \end{aligned}$$

（1-38）式をマクロの金融資産の増分の形で書くと、

$$(1\text{-}41)\quad \begin{aligned} &V_{t+1} - V_t = r_t V_t + w_t N_{1t} - C_{1t} - C_{2t} \\ &= r_t V_t^S + w_t N_{1t} - C_{1t} - C_{2t} + r_t B_{t-1} \\ &= S_t + (B_t - B_{t-1}), t = 1,2,... \\ &V_1 - V_0 = S_0 \end{aligned}$$

予算制約式の形で書くと、

$$(1\text{-}42)\quad \begin{aligned} &C_{1t} + C_{2t} + V_{t+1} = w_t N_{1t} + (1+r_t)V_t, \\ &t = 0,1,2,... \end{aligned}$$

(3) 信用バブルのマクロ経済計算

標準バブルの理論では、バブルの発行元は体系外にあり、バブルの対価として交換される財は体系外に消える。貨幣の理論で、本源的に無価値の証券である貨幣を政府・中央銀行が供給するのに際し、財と交換し、財は消費されて消えるのと、同じ前提である。ただしバブルと財の交換は自由な選択であるのに対し、貨幣の導入のときの交換は、強制であるのが異なる。

さらに標準バブルの理論では標準的なマクロ経済理論に従い、銀行の機能は、家計から預金を受け入れ企業に貸し付け、企業はその貸し付けにより資本設備を保有するという、金融の仲介に限られており、銀行の自己資本をベースにする貸し付けは考えられていない。

しかし現実のバブルの現象を見ると、家計も企業も銀行も、バブルの発行元として積極的に活動している。そして銀行は預金と貸し付けの仲介に留まらず、公的金融のように経済政策としての貸し付け、ベンチャー・キャピタルのように企業活動活発化のための貸し付け、さまざまな金融商品の供給による金融取引の拡大・信用創造を行い、その中にバブルの可能性があることもまた積極的に利用している。

これらの銀行の貸し付けのベースとなる資金は、現実には、銀行の自己資本だけでなく、政府が資金を注入することもあれば、外国から資金が流入することもある。

このように現実のバブルの現象から見て、標準バブルの理論は限定的な定式化に留まっている。そこで本稿では一歩踏み出し、銀行には、歴史的経緯ないし政策的意図から自己資金があり、その自己資本をベースにして、家計に貸し付けを行うとする。そして家計は、その借り入れ資金を企業に貸し付けるとする。そこで企業は、この貸し付け資金により、これまで保有していた本源的に無価値の資産（例えば住宅産業の場合には、造成宅地、木材、鉄骨、コンクリートの集まり、IT産業の場合は電子部品、ソフトウェアの集まり）を有価値の資本設備として保有し、それにより財・サービスを生産するとする。

家計の企業への貸し付け、銀行の家計への貸し付けは、このようにして形成された企業の資本が担保になる。このような銀行→家計→企業の貸し付けは普通にある形態である。これをバブルにするため、銀行の家計への貸し付けが止まり、家計の企業への貸し付けが止まると、貸し付けによって有価値になっていた企業の資産が無価値になってしまうとする。この資産の価値を有価値に維持するため、銀行は貸し付けが

毎期元利返済されるたびにその分を追い貸しし、家計・企業は借り換えて、永久にロールオーバーされるとする。0期中における貸し付けを B_0 とすると、$t+1$ 期における貸し付けは、元利返済分を貸し付けるので、t 期よりも金利分増える。

$$B_{t+1}=(1+r_{t+1})B_t, B_t>0,$$
$$t=0,1,2,...$$

これは、標準バブルと同じ形態である。

標準バブルでは、0期において、家計の貯蓄 S_0 の一部の運用先であり、その分企業の資本形成の投資 I_0 は少なくなった。

標準バブル： $S_0=I_0+B_0, B_0>0$

これに対して、ここで考える銀行→家計→企業の貸し付けによるバブルは、0期において、家計の貯蓄 S_0 に加えて、企業の投資 I_0 を増やす方向に働く。これを本稿では「信用バブル」と呼ぶ。

信用バブル： $S_0+B_0=I_0, B_0>0$

これは標準バブルにおいて、B_0 をマイナスと考えたものに相当し、標準バブルの理論が出発点で否定している定式化である。この場合のマクロ変数の経済計算はどうなるか、前と同じように、寿命無限の消費者を前提とした経済成長論と、寿命有限の消費者が無限に続く重複世代モデルの2つの場合について考える。

(a) 寿命無限消費者の場合

寿命無限消費者の場合、0期首、0期中、0期末＝1期首の経済計算を図1-5と付表1-3により考える。標準バブルの場合と異なり、0期首において、銀行の自己資本 K_{bank} があるとする。

（0期の動き）

0期首の資産、負債の状況を見ると、家計の金融資産 V_0 はすべて銀行への預金残高 V_0^S であり、それは企業の資本 K_0 保有のための貸し付けになっている。

$$V_0=V_0^S=K_0$$

0期中の資産、負債の変動を見る。銀行は資産の変動として、家計の預金からの企業への貸し付けに加えて、自己資本をベースにした家計への貸し付けがある。これを銀行の家計貸し付けバブル B_0 と呼ぶ。家計は負債の変動として、この銀行からの借り入れがあり、これを銀行借り入れバブル B_0 と呼ぶ。家計はこれを企業の資本形成のための投資に貸し付ける。これを企業貸し付けバブル B_0 と呼ぶ。企業は、負債の変動として、銀行の家計預金 $S_0^S=S_0$ からの借り入れに加えて、家計からの借り入れがあり、これを家計借り入れバブル B_0 と呼ぶ。よってこれに見合う企業の投資計 I_0 は、

$$I_0=S_0+B_0$$

となる。

このため、財市場の均衡を表すマクロの生産、所得、支出の関係は、

$$\begin{aligned}Y_0&=F(K_0,N_0)=r_0K_0+w_0N_0\\&=C_0+S_0=C_0+I_0-B_0\end{aligned}$$

よって　$Y_0+B_0=C_0+I_0$

つまり、信用バブルは、マクロ的には、政府からの所得移転、ないし外国からの借り入れによる財の輸入と形式的に同じであり、経済全体への所得注入の効果がある。

資本蓄積 K_1 の式は、

$$K_1=(1+r_0)K_0+w_0N_0-C_0+B_0$$

と、B_0 の分増える。

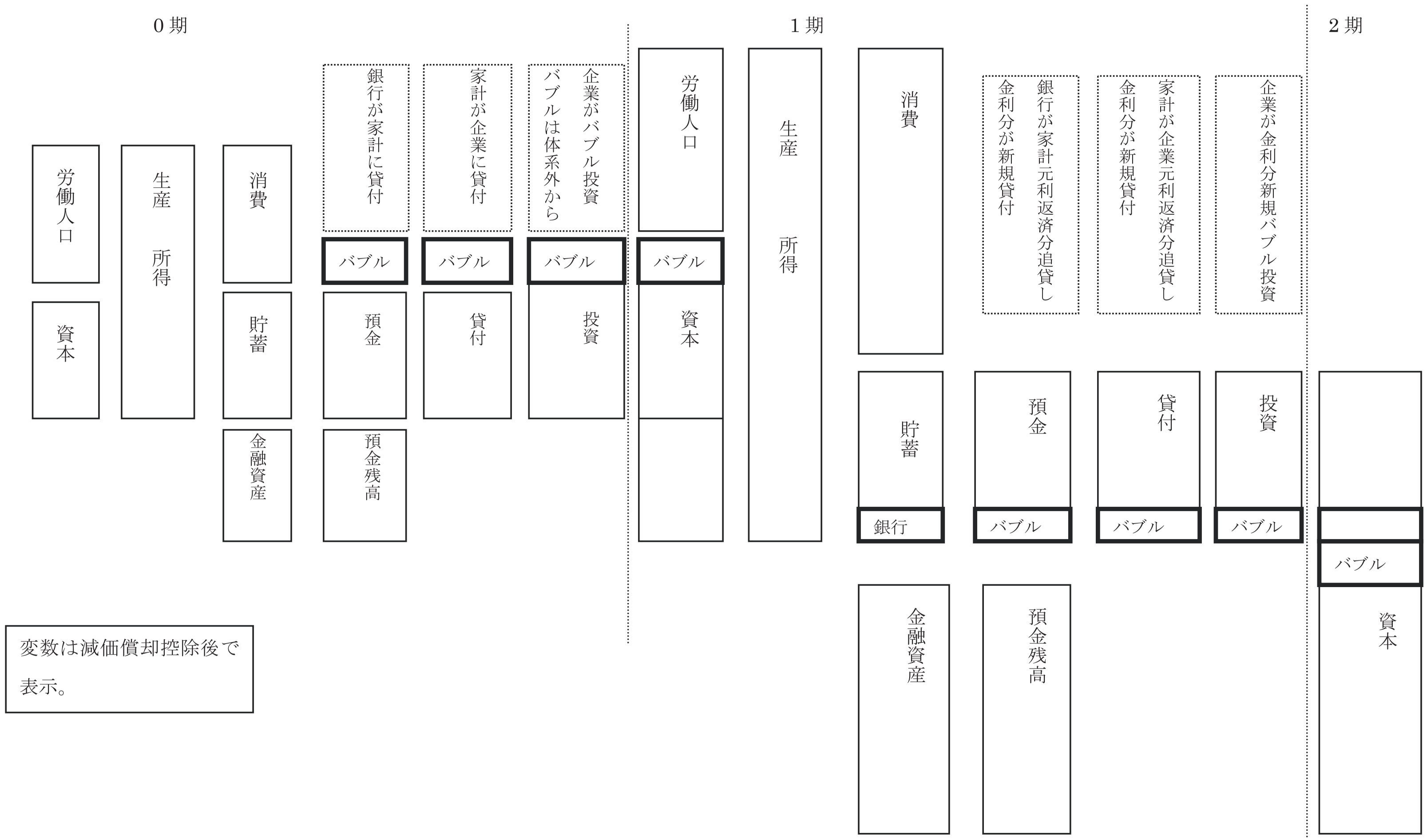
（第1期の動き）

0期末＝1期首における家計の金融資産 V_1 は銀行預金残高 V_1^S のみであり、資産側の企業貸し付けバブル残高と負債側の銀行借り入れバブル残高はともに V_1^B で相殺するので消える。

$$\begin{aligned}V_1&=V_1^S=V_0^S+S_0^S=V_0+S_0\\&=(1+r_0)V_0+w_0N_0-C_0\end{aligned}$$

銀行の資産は、企業貸し付け残高 V_1^S に加えて、家計貸し付けバブル残高 V_1^B が計上される。企業の資産 K_1 に対応する負債は、銀行借り入れ残高 V_1^S に加えて、家計借り入れバブル残高 V_1^B

図1-5　経済成長のプロセスと信用バブル：0期に銀行が家計にバブル貸付、家計が企業にバブル貸付、企業はバブル投資、1期に企業が家計に、家計が銀行に元利返済すると、銀行はその分追い貸し、家計・企業は借り換え。企業は金利分新規バブル投資。



が計上される。よって、

$$K_1 = V_1^S + V_1^B = V_1 + B_0$$

1期中において、企業は生産活動によって得た所得のうち、家計には労働所得 w_1N_1 と、家計借り入れバブルに対する利子支払い分 $r_1V_1^B$ を払い、銀行には、銀行借り入れに対する利子支払い分 $r_1V_1^S$ を払う。

家計は銀行借り入れバブルに対する利子支払い分 $r_1V_1^B$ を銀行に払い、銀行は家計貯蓄に対する利子支払い分 $r_1V_1^S$ を家計に支払う。

結局、企業のレンタル所得 r_1K_1 は、家計の利子所得 $r_1V_1^S$ と、銀行の利子所得 $r_1V_1^B$ になる。

家計は、労働所得 w_1N_1 と利子所得 $r_1V_1^S$ から消費 C_1 した残り S_1 を貯蓄する。

$$S_1 = S_1^S = w_1N_1 + r_1V_1^S - C_1$$

銀行は利子所得 $r_1V_1^B$ が貯蓄になり、これらが企業の投資 I_1 に貸し付けられる。

$$r_1V_1^B = r_1B_0 = B_1 - B_0$$

よって

$$\begin{aligned} I_1 &= S_1 + B_1 - B_0 \\ &= w_1N_1 + r_1V_1^S - C_1 + r_1V_1^B \\ &= r_1K_1 + w_1N_1 - C_1 \end{aligned}$$

これから資本蓄積の式と、生産、所得、支出の式は、通常の形になる。

$$K_2 = K_1 + I_1 = (1+r_1)K_1 + w_1N_1 - C_1$$

$$Y_1 = F(K_1, N_1) = r_1K_1 + w_1N_1 = C_1 + I_1$$

1期末＝2期首における家計の金融資産 $V_2 = V_2^S$ の式も通常の形で、

$$\begin{aligned} V_2 &= V_1 + S_1 = V_1^S + S_1^S \\ &= (1+r_1)V_1 + w_1N_1 - C_1 \end{aligned}$$

（一般の第 t 期の動き）

以下各期についても同様になる。よって銀行の信用バブル B_t が

$$\begin{aligned} &B_{t+1} = (1+r_{t+1})B_t, B_0 > 0, \\ &t = 0,1,2,\ldots \end{aligned} \tag{1-43}$$

で拡大するとき、マクロ経済の変数の関係を示すマクロ経済計算は次のようになる。

家計の金融資産 V_t は、銀行預金残高 V_t^S でもあり、

$$\begin{aligned} V_{t+1} &= (1+r_t)V_t + w_tN_t - C_t \\ &= V_t^S, t = 0,1,2,\ldots \end{aligned} \tag{1-44}$$

家計の予算制約式の形に書くと、

$$\begin{aligned} &C_t + V_{t+1} = w_tN_t + (1+r_t)V_t, \\ &t = 0,1,2,\ldots \end{aligned} \tag{1-45}$$

企業の資産、負債のバランスは、

$$\begin{aligned} &K_{t+1} = V_{t+1} + B_t, t = 0,1,2,\ldots \\ &K_0 = V_0 \end{aligned} \tag{1-46}$$

よって、企業の資本蓄積の式は、

$$\begin{aligned} &K_{t+1} = (1+r_t)K_t + w_tN_t - C_t, \\ &t = 1,2,\ldots \\ &K_1 = (1+r_0)K_0 + w_0N_0 - C_0 + B_0 \\ &K_0 = V_0 \end{aligned} \tag{1-47}$$

$K_{t+1} - K_t = I_t, V_{t+1} - V_t = S_t$ だから、貯蓄・投資バランスは、

$$\begin{aligned} &S_t + (B_t - B_{t-1}) = I_t, t = 1,2,\ldots \\ &S_0 + B_0 = I_0 \end{aligned} \tag{1-48}$$

財市場の均衡を表すマクロの生産、所得、支出の関係は、

$$\begin{aligned} Y_t &= F(K_t, N_t) = r_tK_t + w_tN_t \\ &= C_t + I_t, t = 1,2,\ldots \\ Y_0 &= F(K_0, N_0) = r_0K_0 + w_0N_0 \\ &= C_0 + I_0 - B_0 \end{aligned} \tag{1-49}$$

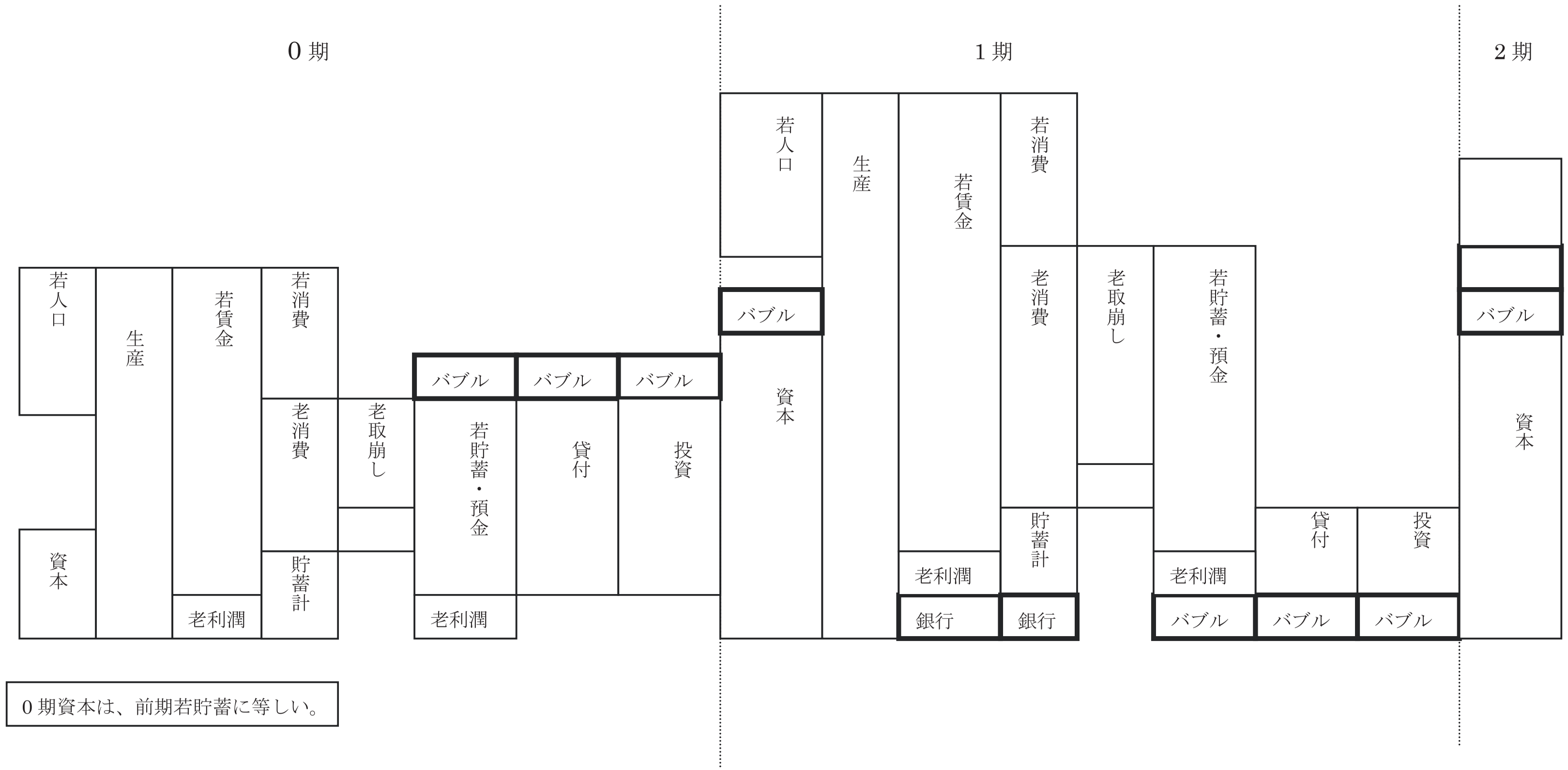
となる。

（b）重複世代モデルの場合

（第0期の動き）

図1-6と付表1-4で考える。

図1-6　重複世代モデルにおける経済成長のプロセスと信用バブル：0期に銀行が若世代にバブル貸付、若世代が企業にバブル貸付、企業はバブル投資、1期に企業が老世代に、老世代が銀行に元利返済すると、銀行はその分次の若世代に貸し、若世代がまた企業に貸し、企業は金利分新規バブル投資。



0 期資本は、前期若貯蓄に等しい。

変数は、減価償却控除後で表示。

老人口は、図では省略。

0期首の若世代の金融資産はゼロである。0期首の老世代の金融資産V_{20}は、マクロの金融資産V_0でもある。それはすべて銀行預金残高V_{20}^Sで、前期－１期の若年期に行った貯蓄$S_{1,-1}$であり、すべて企業の資本K_0の保有のために貸し付けられている。

$$V_0 = V_{20} = V_{20}^S = S_{1,-1} = K_0$$

信用バブルの場合は、0期中に銀行が自己資本K_{bank}をベースにして、0期生まれの若世代にバブル貸し付けB_0を行い、若世代はそれを企業に貸し付ける。企業は、これに加えて、0期の若世代の貯蓄S_{10}である銀行預金S_{10}^Sを借り入れる。老世代の貯蓄は金融資産の取り崩し$S_{20} = -V_{20}^S = -K_0$であり、企業の資本$K_0$保有のための貸し付けを回収することに当たる。よって0期中の企業の負債の変動は、$S_{10}^S + B_0 - K_0$となる。これが0期中の企業の資産の変動、つまり投資I_0に等しい。すなわち、

$$\begin{aligned} I_0 &= K_1 - K_0 = S_{10}^S + B_0 - K_0 \\ &= S_{10} + B_0 - K_0 = S_{10} + S_{20} + B_0 \\ &= S_0 + B_0 \end{aligned}$$

よって、企業の0期末＝1期首の資本K_1は、若世代の預金S_{10}^Sと、バブル借り入れB_0の和に等しい。

$$K_1 = S_{10}^S + B_0 = S_{10} + B_0$$

若世代の予算制約式は、

$$C_{10} + S_{10} = C_{10} + S_{10}^S = w_0 N_{10}$$

よって

$$w_0 N_{10} = C_{10} + K_1 - B_0$$

老世代の予算制約式は、

$$C_{20} = (1 + r_0)V_{20} = (1 + r_0)K_0$$

つまり、老世代はレンタル所得$r_0 K_0$と貯蓄、すなわち金融資産の取り崩し、すなわち企業の資本K_0保有のための貸し付けの回収を行い、消費C_{20}にまわす。

$$r_0 K_0 = C_{20} - K_0$$

よって、0期中の財市場の均衡をあらわすマクロの生産、所得、支出の式は、

$$\begin{aligned} Y_0 &= F(K_0, N_{10}) = r_0 K_0 + w_0 N_{10} \\ &= C_{20} - K_0 + C_{10} + K_1 - B_0 \\ &= C_{10} + C_{20} + I_0 - B_0 \end{aligned}$$

つまり　$Y_0 + B_0 = C_0 + I_0$

よって、資本蓄積の式は、

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 + I_0 \\ &= (1 + r_0)K_0 + w_0 N_{10} - C_{10} - C_{20} + B_0 \end{aligned}$$

0期末=1期首におけるマクロの家計の金融資産V_1は銀行預金残高V_1^Sであり、0期中の若世代の貯蓄S_{10}かつ銀行預金S_{10}^Sである。これは、1期首の老世代の金融資産V_{21}かつ預金残高V_{21}^Sでもある。

$$\begin{aligned} V_1 &= V_1^S = V_{21} = V_{21}^S \\ &= S_{10} = S_{10}^S = K_1 - B_0 \\ &= (1 + r_0)V_0 + w_0 N_{10} - C_{10} - C_{20} \end{aligned}$$

よって、企業の資産・負債バランスは、

$$K_1 = V_1 + B_0$$

（第1期の動き）

1期中の若世代の予算制約式は、

$$C_{11} + S_{11} = w_1 N_{11}$$

つまり、若世代は、労働所得$w_1 N_{11}$から消費C_{11}した残り$S_{11} = S_{11}^S$を銀行に預金する。

$$S_{11} = S_{11}^S = w_1 N_{11} - C_{11}$$

若世代はまた、銀行から利子分増えたバブル$B_1 = (1 + r_1)B_0$を借りて企業に貸す。

1期中に老世代は、貯蓄S_{21}として、預金残高

$$V_{21}^S = S_{10}^S = S_{10} = K_1 - B_0$$

を取り崩し、利子$r_1 V_{21}^S$とともに消費C_{21}にあてる。老世代の貯蓄は、

$$S_{21} = -V_{21}^S = -K_1 + B_0$$

老世代の予算制約式は、

$$C_{21} = (1 + r_1)V_{21}^S$$

老世代は、同時に、銀行からのバブル借り入れ残高＝企業へのバブル貸し付け残高$V_{21}^B = B_0$を解消する。

1期中において、企業の生産活動により生み出される所得は、レンタル所得r_1K_1のうち老世代には利子所得として$r_1V_{21}^S$が帰属し、銀行にはバブル貸し付けの利子所得$r_1V_{21}^B = r_1B_0$が帰属する。労働所得w_1N_{11}は若世代に払われる。

企業にとっては、若世代に対する負債が$S_{11}^S + B_1$だけ増え、老世代に対する負債が$V_{21}^S + B_0$だけ減るので、その差し引き分が資産の増加、つまり投資I_1に等しくなる。

$$I_1 = (S_{11}^S + B_1) - (V_{21}^S + B_0)$$
$$= S_{11}^S + B_1 - K_1$$

よって1期末＝2期首における企業の資本K_2は、

$$K_2 = K_1 + I_1 = S_{11}^S + B_1 = V_{22}^S + B_1$$

となる。マクロの家計の金融資産は$V_2 = V_{22}^S$だから、企業の資産・負債バランスは、

$$K_2 = V_2 + B_1$$

マクロの家計の貯蓄S_1は、

$$S_1 = S_{11} + S_{21} = S_{11}^S + S_{21}^S$$
$$= I_1 - B_1 + K_1 - K_1 + B_0$$
$$= I_1 - (B_1 - B_0)$$

よって、マクロの貯蓄・投資バランスは、

$$S_1 + (B_1 - B_0) = I_1$$

1期中の財市場の均衡を表すマクロの生産、所得、支出の式は、

$$Y_1 = F(K_1, N_{11}) = r_1K_1 + w_1N_{11}$$
$$= r_1V_{21}^S + r_1V_{21}^B + C_{11} + S_{11}^S$$
$$= C_{21} - (K_1 - B_0) + r_1B_0 + C_{11} + I_1 - B_1 + K_1$$
$$= C_{11} + C_{21} + I_1$$

と通常の形になる。

資本蓄積の式は、

$$K_2 = K_1 + I_1$$
$$= (1 + r_1)K_1 + w_1N_{11} - C_{11} - C_{21}$$

バブルの式$B_1 = (1 + r_1)B_0$と辺々引き算し

マクロの家計の金融資産の式は、

$$V_2 = (1 + r_1)V_1 + w_1N_{11} - C_{11} - C_{21}$$

（一般のt期の動き）

一般のマクロ経済計算は次のようになる。

若世代の予算制約式は、

（1-50）
$$C_{1t} + S_{1t} = w_tN_{1t},$$
$$S_{1t} = V_{2,t+1} = V_{t+1}$$
$$= S_{1t}^S = V_{2,t+1}^S = V_{t+1}^S, t = 0,1,2,...$$

老世代の予算制約式は、

（1-51）
$$C_{2t} = (1 + r_t)V_{2t} = (1 + r_t)S_{1,t-1}$$
$$t = 0,1,2,...$$

統合すると、

$$C_{1t} + C_{2t} + V_{t+1} = w_tN_{1t} + (1 + r_t)V_t,$$
$$t = 0,1,2,...$$

これから、マクロの家計の金融資産の式は、

（1-52）
$$V_{t+1} = (1 + r_t)V_t + w_tN_{1t} - C_{1t} - C_{2t},$$
$$t = 0,1,2,...$$

これを金融資産の増分の形で書くと、

（1-53）
$$V_{t+1} - V_t = r_tV_t + w_tN_{1t} - C_{1t} - C_{2t}$$
$$t = 0,1,2,...$$

銀行の信用バブルは、

（1-54）
$$B_{t+1} = (1 + r_{t+1})B_t, B_t > 0,$$
$$t = 0,1,2,...$$

企業の資本K_{t+1}は、若世代の貯蓄S_{1t}とバブル借り入れB_tによる。

（1-55）
$$K_{t+1} = S_{1t} + B_t, t = 0,1,2,...$$
$$K_0 = S_{1,-1}$$

マクロの家計の金融資産は、前期の若世代の貯蓄$V_{t+1} = S_{1t}$だから

（1-56）
$$K_{t+1} = V_{t+1} + B_t, t = 0,1,2,...$$
$$K_0 = V_0 = S_{1,-1}$$

資本蓄積の式は、

（1-57）
$$K_{t+1} = (1+r_t)K_t + w_tN_{1t} - C_{1t} - C_{2t},$$
$$t = 1,2,...$$
$$K_1 = (1+r_0)K_0 + w_0N_{10} - C_{10} - C_{20} + B_0$$

マクロの貯蓄・投資バランスは、

（1-58）
$$S_t + (B_t - B_{t-1}) = I_t, t = 1,2,...$$
$$S_0 + B_0 = I_0$$

マクロの生産、所得、支出の式は、

（1-59）
$$Y_t = F(K_t, N_{1t}) = r_t K_t + w_t N_{1t}$$
$$= C_{1t} + C_{2t} + I_t, t = 1,2,...$$
$$Y_0 = F(K_0, N_{10}) = r_0 K_0 + w_0 N_{10}$$
$$= C_{10} + C_{20} + I_0 - B_0$$

（c） 標準バブルと信用バブルの形式的類似

$t+1$期首における家計の金融資産をV_{t+1}、企業の資本をK_{t+1}、t期中のバブルをB_tと書く。バブルは、$t=0$期中に導入されるとする。

金融資産の式は、ラムゼー・モデルと重複世代モデルについて、それぞれ

（1-60）
$$V_{t+1} = (1+r_t)V_t + w_t N_t - C_t$$
$$V_{t+1} = (1+r_t)V_t + w_t N_{1t} - C_{1t} - C_{2t},$$
$$t = 0,1,2,...$$

ここで、r_tはレンタル率、w_tは賃金率、N_tは人口、N_{1t}は若世代の人口、C_tは消費、C_{1t}, C_{2t}は若世代、老世代の消費である。

バブルの式は、

（1-61）
$$B_{t+1} = (1+r_{t+1})B_t, B_t > 0,$$
$$t = 0,1,2,...$$

さらに、金融資産、企業の資本、バブルの関係を規定する以下の式により、資本蓄積の式つまり財市場の均衡式が決まる。

これらの条件のもとに、次節でみるように、時点をまたがる効用を最大化するように消費を選ぶことにより、モデルは閉じられる。

● ラムゼー・モデルの場合

標準バブルでは、

（1-62）
$$V_{t+1} = K_{t+1} + B_t, t = 0,1,2,...$$
$$V_0 = K_0$$

信用バブルでは、

（1-63）
$$K_{t+1} = V_{t+1} + B_t, t = 0,1,2,...$$
$$K_0 = V_0$$

信用バブルは、標準バブルで$B_t < 0$とした場合と、形式的に同じである。

● 重複世代モデルの場合

標準バブルでは、

（1-64）
$$V_{t+1} = S_{1t} = K_{t+1} + B_t, t = 0,1,2,...$$
$$V_0 = K_0$$

信用バブルでは、

（1-65）
$$K_{t+1} = V_{t+1} + B_t = S_{1t} + B_t, t = 0,1,2,...$$
$$K_0 = V_0$$

ここで、S_{1t}は、t期中における若世代の貯蓄である。

信用バブルは、標準バブルで$B_t < 0$とした場合と、形式的に同じである。

以上から、ラムゼー・モデルにおいても、重複世代モデルにおいても、信用バブルは、標準バブルで$B_t < 0$とした場合と、形式的に同じである。

よって、次節以降の議論では、一般のB_tについて考え、$B_t > 0$の場合と$B_t < 0$の場合の双方があり得るものとして分析することとする。

2. ラムゼー・モデルにおける不安定性とバブルの分析

（1） 1人当たりマクロ変数の関係式

ラムゼー・モデルのマクロ変数の関係式は、第1節の式（1-1）以下（1-11）までで表わされている。ラムゼー・モデルでは、消費者全体を無限寿命の1人の消費者で代表させて分析を進める。この代表的消費者の行動は、第1節のマクロ変数を人口1人当たりの式に変換して求められる。

1人当たり金融資産 $v_t = V_t / N_t$

1人当たり消費 $c_t = C_t / N_t$

1 人当たり資本　$k_t = K_t / N_t$

1 人当たり所得　$y_t = Y_t / N_t$

1 人当たり生産関数

$$f(k_t) = F(K_t, N_t)/N_t = F(K_t/N_t, 1)$$
$$= F(k_t, 1)$$

$V_{t+1}/N_t = (1+n)v_{t+1}, K_{t+1}/N_t = (1+n)k_{t+1}$ に注意して、1 人の寿命無限消費者の予算制約式は、（1-11）式より、

（2-1）　$c_t + (1+n)v_{t+1} = w_t + (1+r_t)v_t,$
$t = 0,1,2,...$

ここで v_0 は所与とする。

金融資産の運用は、（1-7）式より、

（2-2）　$v_t = k_t, t = 0,1,2,...$

ここで k_0 は所与とする。

企業の生産は、式（1-1），（1-4）より、

（2-3）　$y_t = f(k_t) = r_t k_t + w_t, t = 0,1,2,...$

（2-4）　$r_t = f'(k_t), w_t = f(k_t) - f'(k_t)k_t,$
$f'(k_t) > 0, f''(k_t) < 0, t = 0,1,2,...$

資本蓄積の式は、

（2-5）　$(1+n)k_{t+1} - k_t = f(k_t) - c_t$
$= r_t k_t + w_t - c_t, t = 0,1,2,...$

(2) 生涯消費の最適化

(a) 生涯予算制約式による定式化

1 人の寿命無限消費者は、金利 $\{r_t\}_{t=0,1,2,...}$、賃金率 $\{w_t\}_{t=0,1,2,...}$ を所与とし、0 期首の金融資産 v_0 を所与として、予算制約のもとで、無限時点にまたがる生涯効用を最大化するように、消費 $\{c_t\}_{t=0,1,2,...}$、金融資産 $\{v_t\}_{t=0,1,2,...}$ を決める。

つまり、1 人の寿命無限消費者は、次の最大化問題を解く。

$$\max U(c_0, c_1, ..., c_T) = \sum_{t=0}^{T} \frac{u(c_t)}{(1+\theta)^t}$$

（2-6）　$c_t + (1+n)v_{t+1} = w_t + (1+r_t)v_t,$
$t = 0,1,2,...,T$

ここで、$U(c_0, c_1, ..., c_T)$ は生涯効用、$u(c_t)$ は 1 時点の効用で $u'(c_t) > 0, u''(c_t) < 0$ を満たす狭義の凹関数、$0 < \theta < 1$ は所与の時間選好率である。寿命 T は有限として計算してから $T \to \infty$ とする。死後に金融資産は残さないので $v_{T+1} = 0$ とする。

この問題の直感的解は、式（2-6）を生涯予算制約式の形にすると分かる。

各式（2-6-t）は、時点 t における 1 人当たり消費、金融資産、賃金の関係を示すので、これを時点 0 に引き戻すため、人口の増加分と金利分を調整する。時点 0 の 1 人は、時点 t の $(1+n)^t$ 人に相当する。時点 0 の財 1 単位は、時点 t の財 $\prod_{i=1}^{t}(1+r_i)$ 単位に相当する。ただし、

$\prod_{i=1}^{0} a_i = 1$ と約束する。よって、各式（2-6-t）に

（2-7）　$\lambda_t^0 = \dfrac{(1+n)^t}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_i)}, \lambda_0^0 = 1$

をかけると、時点 0 の関係式になる。

$$\lambda_t^0 \cdot \frac{1+n}{1+r_{t+1}} = \lambda_{t+1}^0$$
$$\therefore (1+r_t)\lambda_t^0 = (1+n)\lambda_{t-1}^0$$

に注意すると、これらは、

（2-8）

$$c_0 + (1+n)v_1 = w_0 + (1+r_0)v_0$$
$$\lambda_1^0 c_1 + (1+n)\lambda_1^0 v_2 = \lambda_1^0 w_1 + (1+n)\lambda_0^0 v_1$$
$$....$$
$$....$$
$$\lambda_t^0 c_t + (1+n)\lambda_t^0 v_{t+1} = \lambda_t^0 w_t + (1+n)\lambda_{t-1}^0 v_t$$
$$\lambda_{t+1}^0 c_{t+1} + (1+n)\lambda_{t+1}^0 v_{t+2} = \lambda_{t+1}^0 w_{t+1} + (1+n)\lambda_t^0 v_{t+1}$$
$$....$$
$$....$$
$$\lambda_T^0 c_T + (1+n)\lambda_T^0 v_{T+1} = \lambda_T^0 w_T + (1+n)\lambda_{T-1}^0 v_T$$

となる。$v_{T+1} = 0$ に注意して辺々加えると、

金利 $\{r_t\}_{t=0,1,2,...}$、賃金率 $\{w_t\}_{t=0,1,2,...}$、0 期首の金融資産 v_0 所与のもとで、次の生涯予算制約式を得る。

（2-9） $\sum_{t=0}^{T}\lambda_t^0 c_t = \sum_{t=0}^{T}\lambda_t^0 w_t + (1+r_0)v_0$

$\{c_t\}_{t=0,1,\dots,T}$ の汎関数 $A(c_0, c_1, \dots, c_T)$ を

（2-10） $A(c_0, c_1, \dots, c_T) \equiv \sum_{t=0}^{T}\lambda_t^0 c_t$

で定義すると、生涯予算制約式（2-9）は、

（2-11） $A(c_0, c_1, \dots, c_T) = A(w_0 + (1+r_0), w_1, \dots, w_T)$

と書ける。

ラムゼー・モデルでは金利 $\{r_t\}_{t=0,1,2,\dots}$、賃金率 $\{w_t\}_{t=0,1,2,\dots}$ を所与とするが、無条件で所与とすることは出来ない。分析の結果について $T \to \infty$ とするのであるから、$\{w_t\}_{t=0,1,2,\dots}$ が有界で $w_t \le \overline{w}$ のとき、生涯予算規模 $A(w_0 + (1+r_0), w_1, \dots, w_T)$ は $T \to \infty$ で収束しなければ無意味になる。よって、

（2-12） $\sum_{t=0}^{T}\lambda_t^0$ は $T \to \infty$ で収束

しなければならない。これを、生涯予算制約式収束の条件と呼ぶ。これから、

（2-13） $\lim_{t\to\infty}\lambda_t^0 = 0$

これを横断条件と呼ぶ。

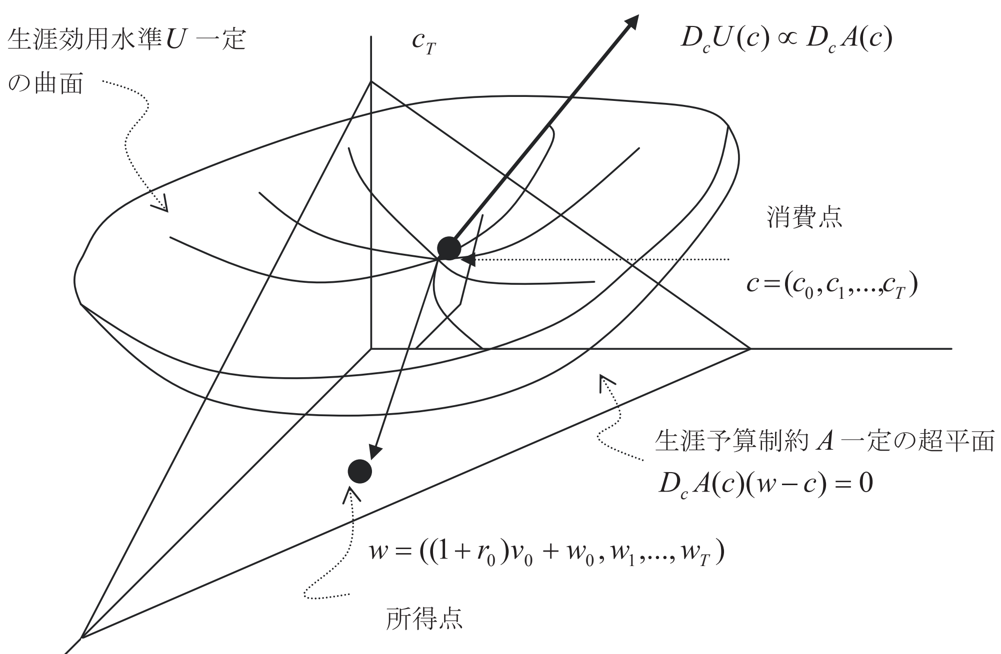
生涯消費 $(c_0, c_1, \dots, c_T)$ は拘束条件（2-11）を満たす必要があり、その全体は $T+1$ 次元空間において生涯予算制約超平面の上になければならない。

他方、生涯効用水準が U となる生涯消費は、

（2-14） $U(c_0, c_1, \dots, c_T) = U$

を満たす $(c_0, c_1, \dots, c_T)$ の全体の作る生涯効用水準一定の、狭義の凸超局面を作る。生涯効用水準 U を最大にするような問題（2-6）の解は、図 2-1 に見るように、これらの超曲面と超平面の接点として唯一定まる。

図2-1　生涯予算制約のもとで生涯効用水準を最大にする点



この接点$c=(c_0,c_1,...,c_T)$が生涯効用を最大化する消費点であり、そこにおいては、超曲面の接平面が超平面と一致する。超平面（2-11）の微分はいたるところ一定で、

$$D_cA(c)\equiv(\frac{\partial A}{\partial c_0},\frac{\partial A}{\partial c_1},...,\frac{\partial A}{\partial c_T})$$

（2-15）
$$=(1,...,\frac{(1+n)^t}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_i)},...,\frac{(1+n)^T}{\prod_{i=1}^{T}(1+r_i)})$$

$$\equiv(\lambda_0^0,...,\lambda_t^0,...,\lambda_T^0)$$

である。超曲面（2-14）の微分を

（2-16）
$$D_cU(c)\equiv(\frac{\partial U}{\partial c_0},...,\frac{\partial U}{\partial c_t},...,\frac{\partial U}{\partial c_T})$$

$$\equiv(\lambda_0,...,\lambda_t,...,\lambda_T)$$

と書くと、これらの各成分はプラスであり、第0成分を1にそろえれば、接点において両者は等しい。

（2-17）
$$D_cA(c)=\frac{1}{\lambda_0}D_cU(c)$$

よって、

（2-18）
$$\frac{\frac{\partial U}{\partial c_t}}{\frac{\partial U}{\partial c_0}}=\frac{\lambda_t}{\lambda_0}=\frac{(1+n)^t}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_i)}=\lambda_t^0$$

が成り立つ。

消費点$c=(c_0,c_1,...,c_T)$と所得点

$$w=(w_0+(1+r_0)v_0,w_1,...,w_T)$$

を結ぶ直線$w-c$は、予算制約超平面上にあるので、

$$D_cA(c)(w-c)=0$$

これは、生涯予算制約式（2-11）そのものである。

（2-6）式のUの定義から、

（2-19）
$$\frac{\partial U}{\partial c_t}=\frac{u'(c_t)}{(1+\theta)^t}$$

よって、（2-18）により、

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial c_t}}{\frac{\partial U}{\partial c_{t+1}}}=(1+\theta)\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})}=\frac{\lambda_t}{\lambda_{t+1}}=\frac{1+r_{t+1}}{1+n}$$

ゆえに、

（2-20）
$$u'(c_t)=\frac{1+r_{t+1}}{(1+\theta)(1+n)}u'(c_{t+1}),$$

$$t=0,1,...,T-1$$

これまでは、時点0における生涯予算制約式を考えてきたが、一般に時点$t=\tau\geq 0$における生涯予算制約式が考えられる。

τ時点以降の1人当たり消費$c_t,t\geq\tau$をτ時点の価値に引き戻すには、前と同じように、

（2-21）
$$\lambda_t^\tau=\frac{(1+n)^{t-\tau}}{\prod_{i=1}^{t-\tau}(1+r_{\tau+i})},\lambda_\tau^\tau=1$$

をかける必要がある。これを用いて、τ期首における金融資産$v(\tau)$を所与として、各時点の予算制約式（2-6）を（2-8）にならって集計すると、τ時点における生涯予算制約式は、

（2-22）
$$\sum_{t=\tau}^{T}\lambda_t^\tau c_t=\sum_{t=\tau}^{T}\lambda_t^\tau w_t+(1+r_\tau)v_\tau$$

となる。（2-7）、（2-21）を比べると、

（2-23）
$$\lambda_t^\tau=\frac{\lambda_t^0}{\lambda_\tau^0}$$

よって、（2-22）から、

$$\sum_{t=\tau}^{T}\lambda_t^0c_t=\sum_{t=\tau}^{T}\lambda_t^0w_t+(1+r_\tau)\lambda_\tau^0v_\tau$$

ここで、金利$\{r_t\}_{t=0,1,2,...}$には下限があるとする。

（2-24）$1+r_t\geq 1+\underline{r}>0$

すると上の式から、

$$\sum_{t=\tau}^{T}\lambda_t^0c_t\geq\sum_{t=\tau}^{T}\lambda_t^0w_t+(1+\underline{r})\lambda_\tau^0v_\tau\geq 0$$

両辺で、$T\to\infty,\tau\to\infty$とすると、

$\sum_{t=\tau}^{T}\lambda_t^0c_t,\sum_{t=\tau}^{T}\lambda_t^0w_t\to 0$だから、

$$(1+\underline{r})\lambda_\tau^0v_\tau\to 0,\tau\to\infty$$

よって、

（2-25）　$\lim_{t\to\infty} \lambda_t^0 v_t = 0$

これを、借り放題なし条件と呼ぶ。

時点 0 における生涯効用最大化の解は、時点 τ における生涯効用最大化の解にもなっている。もしそうでなければ、時点 0 における生涯効用をさらに高めることが出来、最大化に矛盾するからである。

（b）ラグランジュ乗数法による定式化

以上を通常のラグランジュ乗数法で求める。ラグランジアンを L 、ラグランジュ乗数を $\lambda_t > 0, t = 0,1,2,...,T$ とすると、

（2-26）
$$L = U(c_0, c_1, ..., c_T) + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t \{w_t + (1+r_t)v_t - c_t - (1+n)v_{t+1}\}$$

1 階の条件は、

（2-27）
$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \frac{\partial U}{\partial c_t} - \lambda_t = \frac{u'(c_t)}{(1+\theta)^t} - \lambda_t = 0,$$
$$t = 0,1,2,...,T$$

（2-28）
$$\frac{\partial L}{\partial v_{t+1}} = -(1+n)\lambda_t + (1+r_{t+1})\lambda_{t+1} = 0,$$
$$t = 0,1,2,...,T-1$$

よって、

（2-29）
$$\frac{\lambda_t}{\lambda_{t+1}} = (1+\theta)\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \frac{1+r_{t+1}}{1+n},$$
$$t = 0,1,2,...,T-1$$

これから、

（2-30）
$$u'(c_t) = \frac{1+r_{t+1}}{(1+\theta)(1+n)} u'(c_{t+1}),$$
$$t = 0,1,2,...,T-1$$

これらの条件を満たす $\{c_t\}_{t=0,1,2,...,T}$ は汎関数 $U(c_0, c_1, ..., c_T)$ を最大にする関数なので、変分法との類推から、（2-30）式はオイラー方程式と呼ばれる。これは（2-20）そのものである。

ラグランジュ乗数 λ_t は、

（2-31）
$$\frac{\partial U}{\partial c_t} = \lambda_t = \frac{\lambda_t}{\lambda_{t-1}} \cdot \frac{\lambda_{t-1}}{\lambda_{t-2}} \cdots \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\lambda_0$$
$$= \frac{(1+n)^t}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_i)}\lambda_0 = \lambda_t^0 \lambda_0$$

となり、幾何学的解釈と一致する。すなわち、ラグランジュ乗数は、時点 t の 1 人当たりの財を時点 0 の 1 人当たりの財の価値に変換する係数に相当する。

ラグランジュ乗数法による式は、予算制約式と 1 階の条件の 3T+2 コであり、未知数は $\{c_t\}_{t=0,1,2,...,T}, \{v_t\}_{t=1,2,...,T}, \{\lambda_t\}_{t=0,1,2,...,T}$ の 3T+2 コなので、原則として解は存在する。幾何学的解釈によれば、解は唯一存在する。

（2-26）で、$\lambda_t = \lambda_t^0 \lambda_0$ を代入すると、

$$L = U(c_0, c_1, ..., c_T) + \lambda_0 \sum_{t=0}^{T} \lambda_t^0 \{w_t + (1+r_t)v_t - c_t - (1+n)v_{t+1}\}$$

この総和は、（2-8）の総和と同じだから、生涯予算制約式（2-9）を差で表わした形になる。

（2-32）
$$L = U(c_0, c_1, ..., c_T) + \lambda_0 (\sum_{t=0}^{T} \lambda_t^0 w_t + (1+r_0)v_0 - \sum_{t=0}^{T} \lambda_t^0 c_t)$$

よって、λ_0 は、生涯予算制約式（2-9）を制約条件として、生涯効用関数 $U(c_0, c_1, ..., c_T)$ を最大化するときのラグランジュ乗数になっている。これは、（2-17）において、

（2-33）　$D_c U(c) = \lambda_0 D_c A(c)$

となっていることからも明らかである。

予算制約式（2-6）から、生涯予算制約式（2-9）が出るのは、ラグランジュ乗数法による場合でも同じである。よって（2-12）と同様に、$T \to \infty$ のとき、生涯予算制約式収束の条件が成り立たなければならない。

（2-34）　$\sum_{t=0}^{T} \lambda_t = \lambda_0 \sum_{t=0}^{T} \lambda_t^0$ は $T \to \infty$ で収束

これから、横断条件

（2-35）　$\lim_{t\to\infty} \lambda_t = 0$

が出る。

1 人の寿命無限消費者が生涯効用を最大化しているとき、$t=\tau\ge 0$ 期以降の生涯効用も、v_τ を所与として最大化しているはずである。

$$\text{(2-36)}\quad \begin{aligned}&\max U_\tau(c_\tau, c_{\tau+1},...,c_T)=\sum_{t=\tau}^{T}\frac{u(c_t)}{(1+\theta)^{t-\tau}}\\ &c_t+(1+n)v_{t+1}=w_t+(1+r_t)v_\tau,\\ &t=\tau,\tau+1,...,T\end{aligned}$$

この問題のラグランジアンを $L(v_\tau)$、ラグランジュ乗数を $\lambda_{\tau,t}, t=\tau,\tau+1,...,T$ とすると、

$$\text{(2-37)}\quad \begin{aligned}&L(v_\tau)=U(c_\tau,c_{\tau+1},...,c_T)\\ &+\sum_{t=\tau}^{T}\lambda_{\tau,t}\{w_t+(1+r_t)v_t-c_t-(1+n)v_{t+1}\}\end{aligned}$$

1 階の条件は、

$$\text{(2-38)}\quad \begin{aligned}&\frac{\partial L(v_\tau)}{\partial c_t}=\frac{\partial U_\tau}{\partial c_t}-\lambda_{\tau,t}=\frac{u'(c_t)}{(1+\theta)^{t-\tau}}-\lambda_{\tau,t}\\ &=0, t=\tau,\tau+1,...,T\end{aligned}$$

$$\text{(2-39)}\quad \begin{aligned}&\frac{\partial L(v_\tau)}{\partial v_{t+1}}=-(1+n)\lambda_{\tau,t}+(1+r_{t+1})\lambda_{\tau,t+1}\\ &=0, t=\tau,\tau+1,...,T-1\end{aligned}$$

よって、もとのラグランジュ乗数と比べると、

$$\lambda_{\tau,t}=(1+\theta)^\tau\lambda_t$$

となっている。(2-29) から、横断条件

$$\text{(2-40)}\quad \lim_{t\to\infty}\lambda_{\tau,t}=0$$

が成り立つ。

(2-36) の各時点の予算制約式に、

$$\text{(2-41)}\quad \lambda_t^\tau=\lambda_t^0/\lambda_\tau^0$$

をかけて辺々加えると、τ 期以降の生涯予算制約式は、

$$\text{(2-42)}\quad \sum_{t=\tau}^{T}\lambda_t^\tau c_t=\sum_{t=\tau}^{T}\lambda_t^\tau w_t+(1+r_\tau)v_\tau$$

となる。(2-13) から、τ 期における横断条件

$$\text{(2-43)}\quad \lim_{t\to\infty}\lambda_t^\tau=\lim_{t\to\infty}\lambda_t^0/\lambda_\tau^0=0$$

が出る。

(2-24) のように、金利は下限 $\underline{r}$ があるとし、

$$\text{(2-44)}\quad 1+r_\tau>1+\underline{r}>0$$

であるとする。すると (2-41)、(2-42) から、

$$\begin{aligned}&\sum_{t=\tau}^{T}\lambda_t^0 c_t=\sum_{t=\tau}^{T}\lambda_t^0 w_t+(1+r_\tau)\lambda_\tau^0 v_\tau\\ &\ge\sum_{t=\tau}^{T}\lambda_t^0 w_t+(1+\underline{r})\lambda_\tau^0 v_\tau\ge 0\end{aligned}$$

生涯予算制約式が収束するための条件 (2-12) から、τ 期以降の生涯予算制約式も収束しなければならない。すると、$T\to\infty$、$\tau\to\infty$ のとき、

$$\sum_{t=\tau}^{T}\lambda_t^0 c_t, \sum_{t=\tau}^{T}\lambda_t^0 w_t\to 0 \text{ よって } \lambda_\tau^0 v_\tau\to 0$$

でなければならない。よって、

$$\text{(2-45)}\quad \begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}\lambda_t^0 v_t=0, \lim_{t\to\infty}\lambda_t v_t=0,\\ &\lim_{t\to\infty}\lambda_t^\tau v_t=0, \lim_{t\to\infty}\lambda_{\tau,t}v_t=0\end{aligned}$$

(2-45) は借り放題なし条件と呼ぶ。横断条件、借り放題なし条件は、生涯予算制約式が収束するための条件 (2-12) から出る。

τ 期首において、金融資産 v_τ が動いたとき、最大となっている $U_\tau=U(v_\tau)$ がどう動くかは、包絡線定理により、

$$\text{(2-46)}\quad \begin{aligned}&\frac{\partial U(v_\tau)}{\partial v_\tau}=\frac{\partial L(v_\tau)}{\partial v_\tau}=\lambda_{\tau,\tau}(1+r_\tau)\\ &=\lambda_\tau(1+\theta)^\tau(1+r_\tau), \tau=0,1,...,T\end{aligned}$$

(c) ポントリャーギンの最大値原理の形による定式化

ふたたび生涯効用最大化の問題 (2-6) に戻り、それからポントリャーギンの最大値原理と類似の形を導く。予算制約式の両辺を $1+n$ で割り

$$\text{(2-47)}\quad v_{t+1}-v_t=\frac{1}{1+n}\{(r_t-n)v_t+w_t-c_t\}$$

と書き、ハミルトニアンを

$$\text{(2-48)}\quad H=\frac{u(c_t)}{(1+\theta)^t}+\frac{\lambda_t}{1+n}\{(r_t-n)v_t+w_t-c_t\}$$

と書く。すると、前のラグランジアンの 1 階の条件 (2-27)、(2-28) で λ_t を $\lambda_t/(1+n)$ で置き換えたものが成り立つから、

$$\text{(2-49)}\quad \frac{\partial H}{\partial c_t}=\frac{u'(c_t)}{(1+\theta)^t}-\frac{\lambda_t}{1+n}=0$$

（2-50） $\lambda_t - \lambda_{t-1} = -\dfrac{\partial H}{\partial v_t} = -\dfrac{\lambda_t}{1+n}(r_t - n)$

（2-51） $v_{t+1} - v_t = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda_t}$

と、連続時間の場合と類似の形が得られる。

（d）ベルマンの動的計画法による定式化

次に同じ問題（2-6）にベルマンの動的計画法をあてはめるには、$\tau = 0,1,\ldots,T$ について、問題（2-36）を考える。

ベルマンの原理は、$\tau = 0,1,\ldots,T$ について、v_τ を所与とし、

（2-52） $U(v_\tau) = \max\{u(c_\tau) + \dfrac{1}{1+\theta}U(v_{\tau+1})\}$

となるように $\{c_t\}_{t=\tau,\ldots,T}, \{v_t\}_{t=\tau+1,\ldots,T}$ を決めれば、（2-36）従って（2-6）の解になっている、というものである。τ 期首の金融資産 v_τ から出発する最大化経路は、$\tau+1$ 期首以降は、$\tau+1$ 期首の金融資産 $v_{\tau+1}$ から出発する最大化経路になっているはずだからである。

この定式化では、問題は、T を有限とし、$\tau = T, T-1,\ldots,1,0$ と時間に関して逆向きに解くことになる。

まず $v_{T+1} = 0$ だから $U(v_{T+1}) = 0$。
よって、$\tau = T$ のときは、v_T を所与とすると、c_T は、予算制約式から決まる。

$$c_T = w_T + (1+r_T)v_T$$

よって、$c_T = c_T(v_T)$

次に、$\tau = T-1$ のときは、v_{T-1} を所与とすると、予算制約式から、

$$v_T = \frac{1}{1+n}\{w_{T-1} + (1+r_{T-1})v_{T-1} - c_{T-1}\}$$

ここでベルマンの原理（2-52）の $\tau = T-1$ の場合の条件から、

$$\frac{\partial U(v_{T-1})}{\partial c_{T-1}} = u'(c_{T-1}) + \frac{1}{1+\theta}\cdot\frac{\partial U(v_T)}{\partial v_T}\cdot\frac{\partial v_T}{\partial c_{T-1}} = 0$$

ここで、（2-46）、（2-27）から、

$$\frac{\partial U(v_T)}{\partial v_T} = \lambda_T(1+\theta)^T(1+r_T) = u'(c_T)(1+r_T)$$

よって　$u'(c_{T-1}) + \dfrac{1+r_T}{1+\theta}\cdot u'(c_T)(-\dfrac{1}{1+n}) = 0$

これから、オイラー方程式を得る。

$$u'(c_{T-1}) = \frac{1+r_T}{(1+\theta)(1+n)}\cdot u(c_T(v_T))$$

これと予算制約式から、$c_{T-1} = c_{T-1}(v_{T-1})$ が決まり、$v_T = v_T(v_{T-1})$ が決まる。

以下、$\tau = t$ のとき、v_t を所与とし、前の段階で $c_{t+1} = c_{t+1}(v_{t+1}), v_{t+2} = v_{t+2}(v_{t+1})$ が決まっているとして、上と同様に $c_t = c_t(v_t)$、$v_{t+1} = v_{t+1}(v_t)$ が決まる。

$\tau = 0$ に到達すると、v_0 は所与なので、上と同様にして、$c_{0,} = c_0(v_0), v_1 = v_1(v_0)$ が決まる。

こうして、今度は時間について順方向にたどることにより、

$$\begin{aligned}&v_0 \to c_0 \to v_1 \to c_1 \to \cdots \\ &\to v_{T-1} \to c_{T-1} \to v_T \to c_T \to v_{T+1} = 0\end{aligned}$$

と逐次的に変数の値が定まることになる。

ラムゼー・モデルのラグランジュ乗数法による定式化で出てきた予算制約式（2-1）、オイラー方程式（2-30）は、図 2-2 のように、時間の流れに従って v_t, c_t が決まる形をしているが、逐次的には解けない。ベルマンの動的計画法は、時間の流れを逆にたどることにより、逐次的に解くことを可能にしている。

（3）所与の条件が動いた場合の影響

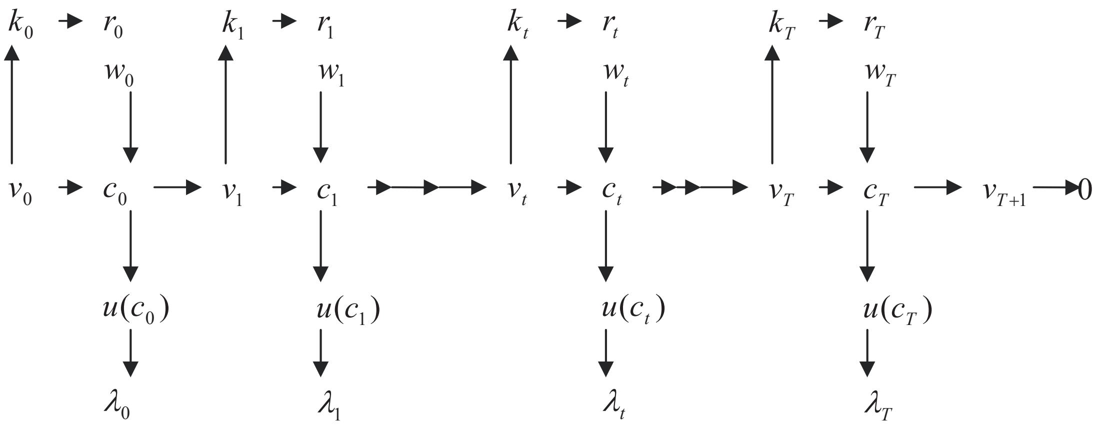
（a）所与の金融資産の動きとラグランジュ乗数、横断条件、借り放題なし条件

0 期首の金融資産 v_0 が所与で、生涯効用 $U = U(v_0)$ が最大になっているとき、この所与の値が動いたとき、生涯効用がどう動くかは、（2-46）により、

$$\frac{\partial U(v_0)}{\partial v_0} = \lambda_0(1+r_0) > 0$$

よって、ラグランジュ乗数 λ_0 は、0 期首の金融資産 v_0 が増えたとき、生涯効用がどれくらい増えるか、を示す。

図2-2　ラムゼー・モデルにおける各変数の関係



同様に、t 期首の金融資産 v_t を所与として t 期以降の生涯効用を最大化するとき、この所与の値が動いたとき、生涯効用は、時点 0 に引き戻した値で、

$$\frac{1}{(1+\theta)^t}\frac{\partial U(v_t)}{\partial v_t}=\lambda_t(1+r_t)$$

だけ動く。よって、ラグランジュ乗数 λ_t は、t 期首の金融資産 v_t が増えたとき、生涯効用が時点 0 に引き戻した値でどれくらい増えるか、を示すものである。

ラグランジュ乗数は、$T+1$ 以降はゼロとしている。

$$\lambda_{T+1}=0$$

これは、死後には金融資産が増えても、その効用はゼロであることを表わす。寿命無限の場合は、$T\to\infty$ の極限でこの条件が成り立つとし、

（2-53）$\lim_{t\to\infty}\lambda_t=0$

とする。これが横断条件である。

横断条件は、生涯予算制約式が有限の値に収束する条件

（2-54）$\sum_{t=0}^{T}\lambda_t$ は $T\to\infty$ で収束

から必要であることを前にみたので、ここでの結果はそれと整合的である。

さらに、死後に金融資産を残さない条件 $v_{T+1}=0$ の意味を考える。

ラグランジアン（2-26）に戻り、包絡線定理により、

$$\frac{\partial U(v_{T+1})}{\partial v_{T+1}}=\frac{\partial L}{\partial v_{T+1}}=-\lambda_T(1+n)<0$$

よって、$v_{T+1}=0$ から少し v_{T+1} を増やし、死後にプラスの金融資産を残すと、生涯効用が減ることになる。従って、$v_{T+1}=0$ は経済合理的である。だが、$v_{T+1}=0$ から少し v_{T+1} を減らし、死後にマイナスの金融資産、つまり借金を残すと、生涯効用は高まる。$v_{T+1}=0$ は、この行動も排除するものである。

寿命無限の場合は、金融資産 v_T を時間 0 における 1 人当たりの財に変換した価値

$$\lambda_T^0 v_T=\frac{(1+n)^T}{\prod_{i=1}^{T}(1+r_i)}\cdot v_T=\frac{\lambda_T}{\lambda_0}\cdot v_T$$

を考えて、これが $T\to\infty$ でプラスでもマイナスでもなくゼロに収束すると考えた。つまり

（2-55）$\lim_{t\to\infty}\lambda_t v_t=0$

として、借り放題なし条件と呼んだ。これも生涯予算制約式収束の条件（2-54）の帰結であることは前に見たとおりである。これは

$$\lim_{t\to\infty} v_t = 0$$

よりも弱い条件であり、（2-53）の境界条件と組んでv_Tが 0 に収束すればよいことを意味する。

（b）所与の金利、賃金率の動きと横断条件、借り放題なし条件、金融資産

1 人の寿命無限消費者は、金利$\{r_t\}_{t=0,1,2,...}$、賃金率$\{w_t\}_{t=0,1,2,...}$を所与とし、0 期首の金融資産v_0を所与として、予算制約のもとで、無限時点にまたがる生涯効用を最大化する。最大になっている生涯効用を$U=U(v_0)$とし、今度は所与の賃金率w_t、金利r_tの値が動いたとき、最大になっている生涯効用はどう動くかを見る。

包絡線定理により、

$$\frac{\partial U(v_0)}{\partial w_t} = \frac{\partial L(v_0)}{\partial w_t} = \lambda_t,$$

$$\text{(2-56)}\quad \frac{\partial U(v_0)}{\partial r_t} = \frac{\partial L(v_0)}{\partial r_t} = \lambda_t v_t,$$

$$t = 0,1,2,...,T$$

よって、前項の横断条件（2-53）、借り放題なし条件（2-54）は、生涯効用が最大化されているとき、遠い将来の賃金率、金利は、生涯効用に影響しなくなることを意味している。

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\partial U(v_0)}{\partial w_t} = \lim_{t\to\infty} \lambda_t = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\partial U(v_0)}{\partial r_t} = \lim_{t\to\infty} \lambda_t v_t = 0$$

さらに（2-56）から、金融資産v_tは、

$$\text{(2-57)}\quad v_t = \frac{\;\frac{\partial U(v_0)}{\partial r_t}\;}{\;\frac{\partial U(v_0)}{\partial w_t}\;} = -\left.\frac{dw_t}{dr_t}\right|_{U\max}$$

と表わされる。この導き方は、消費理論のロワの恒等式の場合と同じである。

生涯効用最大の状態で金利r_tが上がると$(dr_t > 0)$、金融資産v_tを取り崩したとき余計に消費できるようになる。ではどれ位金融資産を持つのが最適かと言うと、賃金率w_tが下がって$(dw_t < 0)$消費が減るおそれがあるとき、ちょうどそれと相殺して$(dw_t + v_t dr_t = 0)$、消費レベルを維持し、元の効用水準に留まっていられるようにするのが良いのである。

（4）財市場の均衡とその安定性・不安定性

1 人の寿命無限消費者は、金利$\{r_t\}_{t=0,1,2,...}$、賃金率$\{w_t\}_{t=0,1,2,...}$を所与とし、0 期首の金融資産v_0を所与として、予算制約のもとで、無限時点にまたがる生涯効用を最大化するように、消費$\{c_t\}_{t=0,1,2,...}$、金融資産$\{v_t\}_{t=0,1,2,...}$を決める。

その定式化においては、寿命Tは当初有限とし、その後$T\to\infty$とする。

この消費者は、財市場・信用市場において、企業の生産活動・投資活動と相互作用を行う。

その状況は、式 (2-1) ~ (2-5) で記述したが、それによれば、次のようになる。

1 人当たり金融資産v_tは、すべて企業の 1 人当たり資本k_t保有のために貸し付けられて、信用市場は均衡する。

$$\text{(2-58)}\quad v_t = k_t, t = 0,1,...,T$$

これと予算制約式（2-1）、企業の生産の条件（2-3）から、財市場の均衡を表わす資本蓄積の式（2-5）が出る。それを差分の形に書くと、

$$\text{(2-59)}\quad k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}(f(k_t) - nk_t - c_t),$$

$$t = 0,1,...,T-1$$

次に消費者の消費行動を表わすオイラー方程式（2-30）を次の形に書く。

$$u'(c_{t+1}) = \frac{(1+\theta)(1+n)}{1+r_{t+1}} u'(c_t)$$

消費者の効用の相対リスク回避度を

$$\text{(2-60)}\quad \frac{1}{\sigma} = -\frac{u''(c_t)c_t}{u'(c_t)} > 0$$

で定義し、以下これが一定の場合を考える。

$u'(c_t)=c_t^{-\frac{1}{\sigma}}$、$\sigma=1$のとき$u(c_t)=\log c_t$

であることは、容易に分かる。

$c_{t+1}-c_t$が小さいとして、テーラー展開により、

$$u'(c_{t+1})\approx u'(c_t)+u''(c_t)(c_{t+1}-c_t)$$
$$=u'(c_t)-\frac{u'(c_t)}{\sigma c_t}(c_{t+1}-c_t)$$

これをオイラー方程式に代入すると、両辺から$u'(c_t)$が消えて、

$$1-\frac{1}{\sigma}\frac{c_{t+1}-c_t}{c_t}=\frac{(1+\theta)(1+n)}{1+r_{t+1}}$$
$$=(1+\theta)\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}$$

これから、c_t,λ_tの増加率の間には、次の関係が成り立つ。

（2-61） $$\frac{1}{\sigma}\frac{c_{t+1}-c_t}{c_t}+(1+\theta)\frac{\lambda_{t+1}-\lambda_t}{\lambda_t}=-\theta$$

これは本節最後に用いる。

c_t,r_tの関係に戻り、θ,n,r_{t+1}が小さいとすれば、

$$c_{t+1}-c_t=\sigma c_t(r_{t+1}-\theta-n)$$

企業の生産の限界条件（2-4）から、

（2-62） $$c_{t+1}-c_t=\sigma c_t(f'(k_{t+1})-\theta-n),\quad t=0,1,...,T-1$$

（2-59），（2-62）は、$(k_t,c_t),t=0,1,...,T-1$についての２元１階の定差方程式であり、１人当たり資本k_0は所与であるが、さらに０期中の消費c_0を所与とすれば、解が定まる。当初の消費者の生涯効用の最大化問題では、c_0も解として求まるのだから、所与とするということは、c_0を動かして、解c_0を定めることが必要になる。

Tが有限の場合は、消費者は死後に資産を残さないので$v_{T+1}=0$、よって$k_{T+1}=0$。

ここで$T\to\infty$として、寿命無限消費者の場合に、この２元１階定差方程式を分析する。

（2-63） $$\begin{aligned}&k_{t+1}-k_t=\frac{1}{1+n}(f(k_t)-nk_t-c_t),\\&c_{t+1}-c_t=\sigma c_t(f'(k_{t+1})-\theta-n),\\&t=0,1,2,...k_0,c_0\text{所与}\end{aligned}$$

横断条件（2-53）は（2-27）から、

（2-64）

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u'(c_t)}{(1+\theta)^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{(1+n)^t}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_i)}\lambda_0=0$$

借り放題なし条件（2-55）は、

（2-65）

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u'(c_t)}{(1+\theta)^t}k_t=\lim_{t\to\infty}\frac{(1+n)^t}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_i)}\lambda_0k_t=0$$

(k_t,c_t)平面で$k_{t+1}=k_t=k$となる曲線は、

（2-66） $c=f(k)-nk$

と書ける。この曲線は原点から出発し、増加して$\bar{k}$でピークをつけ、

$$f'(\bar{k})=n$$

となる。その後減少し、k_∞でk_t軸と交わり、

$$f(k_\infty)=nk_\infty,f'(k_\infty)<n$$

となる。

(k_t,c_t)平面で$c_{t+1}=c_t=c$となるのは、

$$f'(k^*)=\theta+n$$

となるようなk^*について、

$$k=k^*$$

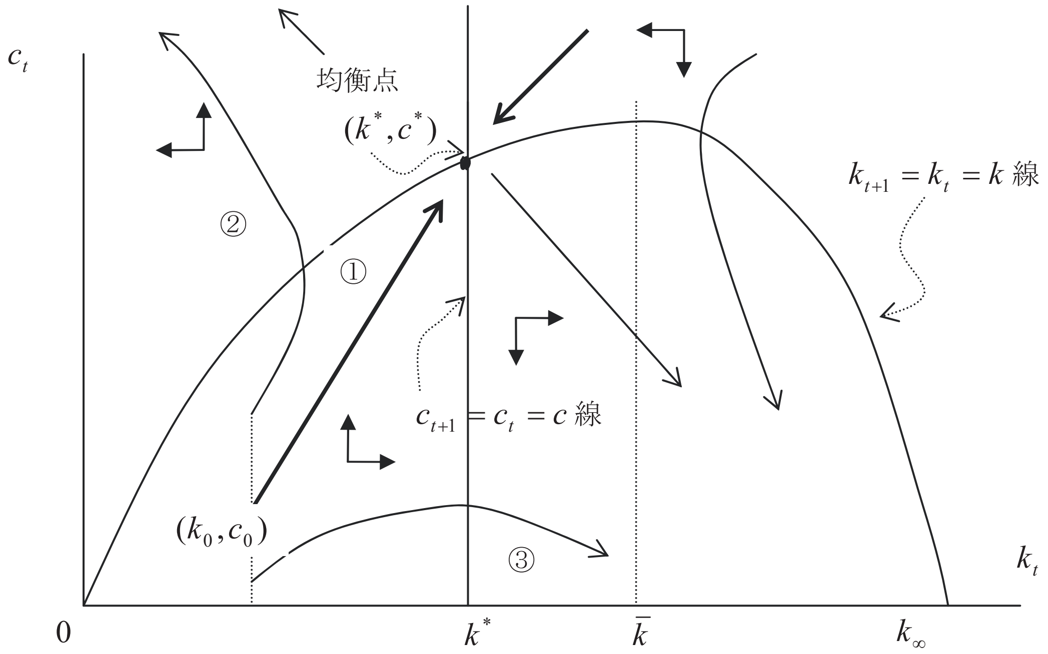
で表わされる、k軸に垂直な直線である。

これらの曲線の交点(k^*,c^*)は唯一定まり、この点から出発するとずっとこの点に留まるという意味で、この定差方程式体系の均衡点、ないし定常状態と呼ぶ。(k^*,c^*)は、次の式を満たす。

（2-67） $$\begin{aligned}&f(k^*)-nk^*=c^*,\\&f'(k^*)=\theta+n\end{aligned}$$

この定差方程式体系の位相図は、図 2-3 のようになる。

図2-3　ラムゼー・モデルの位相図



この定常状態は鞍点であり、出発点 (k_0, c_0) から定常状態 (k^*, c^*) に向かう図中①の鞍点経路のみが安定であり、他の経路は、図中②のように、資本を食いつぶして消費に当てるか、③のように、消費を減らして資本蓄積に当てるかである。

当初の定差方程式 (2-63) を定常状態 (k^*, c^*) の近傍でテーラー展開するため、記号で

$$\Delta x_t = x_t - x^*$$

と書くことにする。すると、(2-67) に注意して、(2-63) のテーラー展開は、

$$\Delta k_{t+1} - \Delta k_t = \frac{\theta}{1+n}\Delta k_t - \frac{1}{1+n}\Delta c_t$$

$$\Delta c_{t+1} - \Delta c_t = \sigma c^* f''(k^*)\Delta k_{t+1}$$

$$= \sigma c^* f''(k^*)(1+\frac{\theta}{1+n})\Delta k_t - \sigma c^* \frac{f''(k^*)}{1+n}\Delta c_t$$

これは $(\Delta k_t, \Delta c_t)$ に関する定数係数の定差方程式であり、行列表示で書くと、

$$\begin{pmatrix}\Delta k_{t+1}\\ \Delta c_{t+1}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\Delta k_t\\ \Delta c_t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta k_t\\ \Delta c_t\end{pmatrix}$$

（この形の定差方程式の解は、付録１参照）

ここでこの行列を A とおき、

$$a_{11} = \frac{\theta}{1+n}, a_{12} = -\frac{1}{1+n},$$

$$a_{21} = \sigma c^* f''(k^*)(1+\frac{\theta}{1+n}),$$

$$a_{22} = -\sigma c^* \frac{f''(k^*)}{1+n}$$

行列 A の固有方程式は、λ を固有値として、

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{1+n}(\sigma c^* f''(k^*) - \theta)\lambda$$

$$+ \sigma c^* \frac{f''(k^*)}{1+n} = 0$$

定数項がマイナスだから 2 根は実根であり、かつ符号が異なるので、$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ とする。1

次の項の係数はマイナスだから、放物線の対称軸はプラスである。

$$\varphi(-1)=1+\frac{\theta}{1+n}>0$$

だから、$-1<\lambda_1<0$である。

固有値λ_iに対応する固有ベクトルを

$$\begin{pmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \end{pmatrix}$$

とすると、定差方程式はIを単位行列として

$$\begin{pmatrix} \Delta k_{t+1} \\ \Delta c_{t+1} \end{pmatrix}=(A+I)\begin{pmatrix} \Delta k_t \\ \Delta c_t \end{pmatrix}$$

と書け、$A+I$の固有値は$1+\lambda_i$、対応する固有ベクトルは同一となる。

この定数係数の定差方程式の解は、a_1, a_2を定数として、

$$\begin{pmatrix} \Delta k_t \\ \Delta c_t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_t-k^* \\ c_t-c^* \end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix}(1+\lambda_1)^t+a_2\begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}(1+\lambda_2)^t \qquad (2\text{-}68)$$

となる。$0<1+\lambda_1<1<1+\lambda_2$だから、第 1 項はゼロに収束し、第 2 項は発散する。解は鞍点経路のみが実現可能なので、$a_2=0$でなければならない。

この定差方程式が、定常状態(k^*, c^*)の近傍から初期値(k_0, c_0)まで大域的に延長される場合には、(2-68) で$t=0$として、

c_0は、

$$\frac{c_0-c^*}{k_0-k^*}=\frac{x_1^2}{x_1^1}$$

の関係を満たさなければならない。

鞍点経路では、$t\to\infty$のとき$c_t\to c^*$、$k_t\to k^*$だから、横断条件 (2-64)、借り放題なし条件 (2-65) が満たされている。

消費の初期値c_0が、図の②のように大きいと、c_tが一定値に向かう一方、k_tはゼロに向かうので、$f'(k_t)$は∞に向かい、当初の定差方程式 (2-63) の第 2 式に矛盾する。

消費の初期値c_0が図の③のように小さいと、c_tがゼロに向かう一方、k_tはk_∞に向かい、$f'(k_t)<n$となり、次項でみるように、動学的に非効率である。さらに、これから

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u'(c_t)}{(1+\theta)^t}=\infty$$

が出る（付録 2 参照）ので、横断条件 (2-64) に矛盾する。

(5) 動学的に非効率な成長となる条件

オイラー方程式 (2-30) から、$s<t$に対し、

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_s)}=\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t-1})}\cdot\frac{u'(c_{t-1})}{u'(c_{t-2})}\cdots\frac{u'(c_{s+1})}{u'(c_s)}$$

$$=\frac{(1+\theta)^{t-s}}{\prod_{i=1}^{t-s}\frac{1+r_{s+i}}{1+n}}=\lambda_{t-s}^0(1+\theta)^{t-s}$$

ここでラグランジュ乗数の意味は (2-18) を使う。

$$\therefore\frac{1}{\lambda_{t-s}^0}=\prod_{i=1}^{t-s}\frac{1+r_{s+i}}{1+n}=\frac{u'(c_s)}{u'(c_t)}(1+\theta)^{t-s}$$

1 人当たり消費$\{c_t\}$が生涯効用を最大にするような鞍点経路をたどるならば、

$s<t$ならば$c_s<c_t$

1 時点効用関数$u(c)$は、$u'(c)>0, u''(c)<0$だから

$$u'(c_s)>u'(c_t)$$

よって、

$$\prod_{i=1}^{t-s}\frac{1+r_{s+i}}{1+n}>(1+\theta)^{t-s}$$

これを$t=s+1$からTまで和をとると、

$$\sum_{t=s+1}^{T}\frac{1}{\lambda_{t-s}^0}=\sum_{t=s+1}^{T}\prod_{i=1}^{t-s}\frac{1+r_{s+i}}{1+n}>\sum_{t=s+1}^{T}(1+\theta)^{t-s}$$

$$=(1+\theta)\frac{((1+\theta)^{T-s}-1}{(1+\theta)-1}$$

$$\to\infty, T\to\infty$$

よって、1 人当たり消費が最適経路をたどれば、

（2-69）

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{t=s+1}^{T}\frac{1}{\lambda_{t-s}^{0}}=\lim_{T\to\infty}\sum_{t=s+1}^{T}\prod_{i=1}^{t-s}\frac{1+r_{s+i}}{1+n}=\infty$$

でなければならない。これはキャス、バラスコ、シェルの条件である。この対偶をとると、資本が過剰で、レンタル率 $r_t = f'(k_t)$ が低過ぎて

（2-70）

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{t=s+1}^{T}\frac{1}{\lambda_{t-s}^{0}}=\lim_{T\to\infty}\sum_{t=s+1}^{T}\prod_{i=1}^{t-s}\frac{1+r_{s+i}}{1+n}<\infty$$

ならば、経済は最適経路上にないことになる。

資本を減らした方が消費が増え、効用水準が高まるような経路は、動学的に非効率であると言うので、不等式（2-70）が成り立っているときは、経済成長は動学的に非効率である。

一般に、$a>0,b>0$ なら $1/a+1/b>1/(a+b)$ だから、次の不等式が成り立つ。

$$\sum_{t=T_0}^{T}\frac{1}{\lambda_{t-s}^{0}}>\frac{1}{\sum_{t=T_0}^{T}\lambda_{t-s}^{0}}$$

生涯予算制約式の収束の条件（2-12）が成り立っていれば、$T_0,T\to\infty$ のとき、不等式で右辺の分子はゼロに収束する。よって左辺は無限大に発散し、

$$\sum_{t=s+1}^{T}\frac{1}{\lambda_{t-s}^{0}}>\sum_{t=T_0}^{T}\frac{1}{\lambda_{t-s}^{0}}$$ だから、

キャス、バラスコ、シェルの条件（2-69）が成り立つ。その対偶として、キャス、バラスコ、シェルの条件が成り立たず、（2-70）となる場合は、生涯予算制約式の収束の条件（2-12）が成り立たっていないことになる。

(6) ラムゼー・モデルでも、横断条件が成り立たなければ、バブルがある

寿命無限消費者を前提とするラムゼー・モデルに標準バブルを入れる定式化は、前節第２項で見た。それによれば、$t+1$ 期首におけるマクロの家計の金融資産 V_{t+1} は、企業の資本保有 K_{t+1} への貸し付けと t 期中に取得したバブル $B_t>0$ からなる。

（1-26）　$V_{t+1}=K_{t+1}+B_t, t=0,1,2,...$

バブルの式は、

（1-24）　$B_{t+1}=(1+r_{t+1})B_t, t=0,1,2,...$

マクロの家計の予算制約式は、

（1-30）　$C_t+V_{t+1}=w_tN_t+(1+r_t)V_t,$
$t=0,1,2,...$

資本蓄積の式は、

（1-23）
$$\begin{aligned}K_1&=(1+r_0)K_0+w_0N_0-C_0-B_0\\&=K_0+F(K_0,N_0)-C_0-B_0\\K_{t+1}&=(1+r_t)K_t+w_tN_t-C_t\\&=K_t+F(K_t,N_t)-C_t, t=1,2,...\end{aligned}$$

これらを１人当たりの変数の式に変換する。

$$\begin{aligned}&k_t=K_t/N_t, c_t=C_t/N_t, v_t=V_t/N_t,\\&b_t=B_t/N_t, f(k_t)=F(K_t/N_t,1)\end{aligned}$$

とし、$V_{t+1}/N_t=(1+n)v_{t+1}$ などに注意して、

（2-71）　$(1+n)v_{t+1}=(1+n)k_{t+1}+b_t, t=0,1,2,...$

（2-72）　$(1+n)b_{t+1}=(1+r_{t+1})b_t, t=0,1,2,...$

（2-73）　$c_t+(1+n)v_{t+1}=w_t+(1+r_t)v_t,$
$t=0,1,2,...$

（2-74）　$(1+n)k_1=k_0+f(k_0)-c_0-b_0,$
$(1+n)k_{t+1}=k_t+f(k_t)-c_t, t=1,2,...$

１人の寿命無限消費者は、予算制約式（2-73）のもとに生涯効用を最大化する。オイラー方程式は前と同じであり、それをテーラー展開した

（2-62）　$c_{t+1}-c_t=\sigma c_t(f'(k_{t+1})-\theta-n),$
$t=0,1,2,...$

が成り立つ。

またラグランジュ乗数 $\{\lambda_t\}$ は、

（2-29）　$\dfrac{\lambda_t}{\lambda_{t+1}}=\dfrac{1+r_{t+1}}{1+n}, t=0,1,2,...$

を満たす。

$t=0$ でこの消費者が、k_0,c_0 を所与とし、貯蓄の一部を銀行預金せずに、バブル $b_0>0$ の購入に回したとする。すると（2-74-0）により、k_1 を $b_0/(1+n)$ だけ減らすことになる。すると、（2-62-0）で $f'(k_1)$ が高まる分だけ c_1 を増やす

ことになる。するとその分、(2-74-1) で k_2 を減らすことになる。

このように、$t=0$ にバブル $b_0>0$ を購入すると、経済は $t=1$ 以降、鞍点経路よりも資本蓄積を減らし、消費を増やす経路をたどるようになる。図 2-3 で見ると、①の経路から $t=1$ 以降は②の経路に入ってしまう。こうならないためには、もともとのバブルの価格 $p_0=0$、バブルの価値 $b_0=0$ でなければならない。すなわち、消費者が合理的ならば、バブルはないことになる。

これは、横断条件からも出る。$b_0>0$ で解が鞍点経路をたどることがあるとすれば、(2-29)、(2-72) から、

$$\frac{\lambda_t}{\lambda_{t+1}}=\frac{1+r_{t+1}}{1+n}=\frac{b_{t+1}}{b_t}, t=0,1,2,...$$

よって、

$$\lambda_t b_t=\lambda_0 b_0, \lambda_0>0, t=1,2,...$$

これから、

$$\lim_{t\to\infty} b_t=\lambda_0 b_0\frac{1}{\lim_{t\to\infty}\lambda_t}$$

$b_0>0$ ならば、横断条件 (2-26) から右辺は $\to\infty$ となるから、

$$\lim_{t\to\infty} b_t=\infty$$

ところが、鞍点経路では、$k_t\to k^*$ (有限) だから、(2-71) から、この消費者の金融資産 v_t は、十分時間がたつと、バブルだけになる。これは矛盾である。よって、消費者が合理的ならば、$b_0=0$、つまりバブルはないことになる。

この論法は、寿命無限の消費者の場合には、本源的に無価値の貨幣を導入すると同様の矛盾に達するので、財表示の貨幣の価値はゼロ、という貨幣の理論と同じである。つまり、貨幣は標準バブルの 1 つの例である。

信用バブルの場合は、上で $b_t<0$ とした場合と同じであり、鞍点経路と比べると、$t=1$ において、k_1 を $|b_0|/(1+n)$ だけ増やし、$f'(k_1)$ が低まる分だけ c_1 を減らすことになる。するとその分、k_2 を増やすことになる。これが続くので、信用バブルを導入すると、経済は $t=1$ 以降、鞍点経路よりも資本蓄積を増やし、消費を減らす経路をたどるようになる。図 2-3 で見ると、①の経路から $t=1$ 以降は③の経路に入ってしまう。こうならないためには、もともとのバブルの価格 $p_0=0$、バブルの価値 $b_0=0$ でなければならない。すなわち、消費者が合理的ならば、バブルはないことになる。

横断条件からも同じことが言える。

このように、ラムゼー・モデルでは、寿命無限の消費者が合理的ならば、バブルはないことになる。第 4 節 (2) (b) で見るように、寿命無限の消費者が単にマクロの家計消費の人口平均であるときは、生涯効用最大化、横断条件、借り放題なし条件が成り立たない場合があり得る。その場合には、バブルもある可能性が出てくる。

横断条件、借り放題なし条件が成り立たない場合のラムゼー・モデルでバブルがあると、どういうことになるのかは、1 人当たり資本 k_t、1 人当たり消費 c_t、1 人当たりバブル b_t についての定差方程式 (2-74)、(2-62)、(2-73) の解がどう動くか、をみればよい。さらに、ラグランジュ乗数 λ_t と 1 人当たり消費 c_t の関係 (2-61) を用いる。

バブルがゼロでないとし、これらの定差方程式を、次の形に書く。

(2-75)

$$k_1-k_0=\frac{1}{1+n}(f(k_0)-nk_0-c_0-b_0)$$

$$k_{t+1}-k_t=\frac{1}{1+n}(f(k_t)-nk_t-c_t), t\geq 1$$

$$\frac{c_{t+1}-c_t}{c_t}=\sigma(f'(k_{t+1})-\theta-n), t\geq 0$$

$$\frac{b_{t+1}-b_t}{b_t}=\frac{1}{1+n}(f'(k_{t+1})-n), t\geq 0$$

$$\frac{1}{\sigma}\frac{c_{t+1}-c_t}{c_t}+(1+\theta)\frac{\lambda_{t+1}-\lambda_t}{\lambda_t}=-\theta$$

（2-75-3）、（2-75-4）から、

$$(1+n)\frac{b_{t+1}-b_t}{b_t}-\frac{1}{\sigma}\frac{c_{t+1}-c_t}{c_t}=\theta$$

これと（2-75-5）から、

$$(1+n)\frac{b_{t+1}-b_t}{b_t}+(1+\theta)\frac{\lambda_{t+1}-\lambda_t}{\lambda_t}=0$$

一般に、$\Delta x_t=x_{t+1}-x_t$ が x_t と比べて小さいときは、

$$\frac{x_{t+1}-x_t}{x_t}=\frac{\Delta x_t}{x_t}\approx\log(1+\frac{\Delta x_t}{x_t})=\log\frac{x_{t+1}}{x_t}$$

だから、$b_{t+1}-b_t$、$c_{t+1}-c_t$、$\lambda_{t+1}-\lambda_t$ が小さいときは、

$$(1+n)\log\frac{b_{t+1}}{b_t}-\frac{1}{\sigma}\log\frac{c_{t+1}}{c_t}=\theta$$

$$(1+n)\log\frac{b_{t+1}}{b_t}+(1+\theta)\log\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}=0$$

これらの t のところに、$0,1,...,t-1$ を入れて、辺々たすと、

$$(1+n)\log\frac{b_t}{b_0}-\frac{1}{\sigma}\log\frac{c_t}{c_0}=\theta t$$

$$(1+n)\log\frac{b_t}{b_0}+(1+\theta)\log\frac{\lambda_t}{\lambda_0}=0$$

$$\frac{1}{\sigma}\log\frac{c_t}{c_0}+(1+\theta)\log\frac{\lambda_t}{\lambda_0}=-\theta t$$

よって、

$$\frac{|b_t|^{1+n}}{c_t^{1/\sigma}}=const.e^{\theta t}\to\infty(t\to\infty)$$

$$|b_t|^{1+n}\lambda_t^{1+\theta}=const.$$

$$c_t^{1/\sigma}\lambda_t^{1+\theta}=const.e^{-\theta t}\to 0(t\to\infty)$$

ゆえに、バブルは、消費の無限大倍に膨らむ。ラグランジュ乗数で測った遠い未来の消費の現在価値はゼロに収束するが、バブルの現在価値は未来永劫不変である。

よって、経済変数がマクロの集計量であって、横断条件、借り放題なし条件など経済合理性の条件がない場合でも、いずれその不合理性に気づき、修正が行われることになる。ただし、その状況が明らかになるまで、修正が行われない。これは、現実のバブルの姿に合致している。

3. 重複世代モデルにおける不安定性とバブルの分析

(1) 標準モデルで老年期にも労働所得がある場合

時間 $t=0,1,2,...$ につき、各 t 期首に N_t 人が財産を持たずに生まれ、t 期、$t+1$ 期の２期働き、消費し、貯蓄し、財産を残さずに $t+1$ 期末に死ぬとする。人口増加率を n とすると、各 t 期の全人口は

$$N_{0t}=N_t+N_{t-1}=(1+\frac{1}{1+n})N_t$$

である。

t 期に生まれる１人の消費者は、t 期の賃金率 w_t、$t+1$ 期の賃金率 w_{t+1}、金利 r_{t+1} を所与として、若年期の消費 $c_{t,t}$、老年期の消費 $c_{t,t+1}$ を、２期間の効用 U_t を最大にするように選ぶ。

$$(3\text{-}1)\quad \max U_t=u(c_{t,t})+\frac{u(c_{t,t+1})}{1+\theta}$$

予算制約式は、$v_{t,t+1}$ を $t+1$ 期首における金融資産として、

$$(3\text{-}2)\quad \begin{aligned}&c_{t,t}+v_{t,t+1}=w_t,\\&c_{t,t+1}=w_{t+1}+(1+r_{t+1})v_{t,t+1}\end{aligned}$$

t 期首の金融資産はないので $v_{t,t}=0$、また $t+2$ 期首 = $t+1$ 期末の金融資産は、残さず消費に回すので $v_{t,t+2}=0$ である。

生涯予算制約式の形で書くと、

$$(3\text{-}3)\quad c_{t,t}+\frac{c_{t,t+1}}{1+r_{t+1}}=w_t+\frac{w_{t+1}}{1+r_{t+1}}$$

ラグランジアンを L_t、ラグランジュ乗数を

$\lambda_{t,t},\lambda_{t,t+1}$ とすると、

$$L_t = u(c_{t,t}) + \frac{u(c_{t,t+1})}{1+\theta}$$
$$+\lambda_{t,t}(w_t - c_{t,t} - v_{t,t+1}) \quad (3\text{-}4)$$
$$+\lambda_{t,t+1}(w_{t+1} + (1+r_{t+1})v_{t,t+1} - c_{t,t+1})$$

1 階の条件は、

$$\frac{\partial L_t}{\partial c_{t,t}} = u'(c_{t,t}) - \lambda_{t,t} = 0,$$
$$\frac{\partial L_t}{\partial c_{t,t+1}} = \frac{u'(c_{t,t+1})}{1+\theta} - \lambda_{t,t+1} = 0, \quad (3\text{-}5)$$
$$\frac{\partial L_t}{\partial v_{t,t+1}} = -\lambda_{t,t} + \lambda_{t,t+1}(1+r_{t+1}) = 0$$

よって、

$$\frac{\lambda_{t,t}}{\lambda_{t,t+1}} = 1 + r_{t+1} \quad (3\text{-}6)$$

最大化のオイラー方程式は、

$$u'(c_{t,t}) = \frac{1+r_{t+1}}{1+\theta}u'(c_{t,t+1}) \quad (3\text{-}7)$$

第 1 節（1）(b) の（1-16）式で見たように、$t+1$ 期首のマクロの金融資産 V_{t+1} は、すべて t 期生まれの世代の貯蓄 S_{1t} であり、すべて企業の資本保有 K_{t+1} のための貸し付けになっているから、

$$V_{t+1} = K_{t+1} = S_{1t} \quad (3\text{-}8)$$

これを 1 人当たりの変数に変換する。

$$v_{t,t+1}N_t = V_{t+1},$$
$$s_t N_t = S_{1t}$$

若年期も老年期も働くとするので、$t+1$ 期における労働人口は全人口

$$N_{0,t+1} = N_{t+1} + N_t = (2+n)N_t$$

であり、$t+1$ 期首における 1 人当たり資本は

$$k_{t+1} = K_{t+1}/N_{0,t+1}$$

だから、（3-8）の各辺を N_t で割ると、

$$v_{t,t+1} = (2+n)k_{t+1} = s_t \quad (3\text{-}9)$$

ここで、t 期生まれの世代の t 期中の貯蓄 $s_t = v_{t,t+1}$ は、t 期の賃金率 w_t、$t+1$ 期の賃金率 w_{t+1}、金利 r_{t+1} で決まるので、

$$s_t = s(w_t, w_{t+1}, r_{t+1}) \quad (3\text{-}10)$$

また企業の生産の限界条件から、

$$w_t = w(k_t) = f(k_t) - f'(k_t)k_t \quad (3\text{-}11\text{-}1)$$

$$r_{t+1} = r(k_{t+1}) = f'(k_{t+1}) \quad (3\text{-}11\text{-}2)$$

だから、（3-9），（3-10）より、次の k_t についての定差方程式を得る。

$$(2+n)k_{t+1} = s(w(k_t), w(k_{t+1}), r(k_{t+1})) \quad (3\text{-}12)$$

(2) 複数均衡の存在

特に $\sigma = 1, u(c_t) = \log c_t$ の場合を考える。$\beta = 1/(1+\theta)$ とおく。オイラー方程式（3-7）は、

$$c_{t,t} = \frac{1}{\beta}\cdot\frac{c_{t,t+1}}{1+r_{t+1}} \quad (3\text{-}13)$$

よって、生涯予算制約式（3-3）により、

$$c_{t,t} = \frac{1}{1+\beta}\left(w_t + \frac{w_{t+1}}{1+r_{t+1}}\right), \quad (3\text{-}14)$$
$$\frac{c_{t,t+1}}{1+r_{t+1}} = \beta c_{t,t}$$

ゆえに、t 期の若年消費者の貯蓄関数は、

$$s_t = s(w_t, w_{t+1}, r_{t+1}) = w_t - c_{t,t}$$
$$= \frac{\beta}{1+\beta}w_t - \frac{1}{1+\beta}\cdot\frac{w_{t+1}}{1+r_{t+1}} \quad (3\text{-}15)$$

よって、

$$\frac{\partial s}{\partial w_t} = \frac{\beta}{1+\beta}, \frac{\partial s}{\partial w_{t+1}} = -\frac{1}{(1+\beta)(1+r_{t+1})}, \quad (3\text{-}16)$$
$$\frac{\partial s}{\partial r_{t+1}} = \frac{w_{t+1}}{(1+\beta)(1+r_{t+1})^2}$$

（3-12），（3-15）より、

$$(2+n)k_{t+1} + \frac{1}{1+\beta}\cdot\frac{w_{t+1}}{1+r_{t+1}} = \frac{\beta}{1+\beta}w_t \quad (3\text{-}17)$$

よって、k_tについての定差方程式は、

(3-18)

$$(2+n)k_{t+1}+\frac{1}{1+\beta}\cdot\frac{w(k_{t+1})}{1+r(k_{t+1})}=\frac{\beta}{1+\beta}w(k_t)$$

ここで、

(3-19)
$$\frac{d}{dk}\frac{w(k)}{1+r(k)}$$
$$=\frac{d}{dk}\frac{f(k)-f'(k)k}{1+f'(k)}=-\frac{f''(k)(k+f(k))}{(1+f'(k))^2}$$

よって、定差方程式(3-18)の全微分をとると、

(3-20)
$$\left\{(2+n)-\frac{1}{1+\beta}\cdot\frac{f''(k_{t+1})(k_{t+1}+f(k_{t+1}))}{(1+f'(k_{t+1}))^2}\right\}dk_{t+1}$$
$$=-\frac{\beta}{1+\beta}k_t f''(k_t)dk_t$$

dk_{t+1},dk_tの係数は、いずれもプラスである。定常状態を$k_{t+1}=k_t=k^*$とすると、安定の条件$dk_{t+1}/dk_t<1$は、

(3-21)

$$(2+n)-\frac{1}{1+\beta}\cdot\frac{f''(k^*)(k^*+f(k^*))}{(1+f'(k^*))^2}+\frac{\beta}{1+\beta}k^*f''(k^*)>0$$

(3-18)から、定常状態$k_{t+1}=k_t=k^*$は、次を満たす。

$$(2+n)k^*+\frac{1}{1+\beta}\cdot\frac{w(k^*)}{1+r(k^*)}=\frac{\beta}{1+\beta}w(k^*)$$

すなわち、

(3-22) $$w(k^*)\left(\beta-\frac{1}{1+r(k^*)}\right)\frac{1}{(1+\beta)(2+n)}=k^*$$

1人当たり資本がゼロに留まる$k^*=0$は、定常状態である。1人当たり資本がプラス$k^*>0$となる定常状態を見るため、両辺をk^*で割ると、(3-11-1)に注意して、

(3-23)

$$\left(\frac{f(k^*)}{k^*}-f'(k^*)\right)\left(\beta-\frac{1}{1+f'(k^*)}\right)\frac{1}{(1+\beta)(2+n)}=1$$

よって、kの関数として、

$$A(k)=\frac{f(k)}{k}-f'(k),$$
$$B(k)=\frac{1}{(1+\beta)(2+n)}\left(\beta-\frac{1}{1+f'(k)}\right)$$

を考えると、プラスの定常状態$k=k^*$は、

$$A(k^*)=\frac{1}{B(k^*)}$$

を満たす。

特に、生産関数がコブ・ダグラス型の場合、CES型の場合を考える。

コブ・ダグラス型生産関数は、

(3-24)
$$F(K,N)=aK^{\alpha}N^{1-\alpha},$$
$$f(k)=ak^{\alpha},0<\alpha<1$$

CES型生産関数は、

(3-25)
$$F(K,N)=a(\alpha K^{-\rho}+(1-\alpha)N^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}},$$
$$f(k)=a(\alpha k^{-\rho}+1-\alpha)^{-\frac{1}{\rho}},$$
$$\rho>-1,0<\alpha<1$$

であり、$\rho\to 0$　のときコブ・ダグラス型になる。$\rho=0$のときは線形になる。

$A(k),1/B(k)$のグラフは次のようになる。(証明は付録3参照)

図3-1-1から、生産関数がコブ・ダグラス型か、CES型で$-1<\rho<0$のときは、ゼロ以外の定常状態は1つである。

図3-1-2から、生産関数がCES型で$\rho>0$のときは、ゼロ以外の定常状態が2つあって複数均衡が存在する。

これらの定常状態の安定性をみるため、ゼロの定常状態$k_{t+1}=k_t=k=0$における

$$\left.\frac{dk_{t+1}}{dk_t}\right|_{k=0}$$を調べる。(付録4参照)

すると、生産関数がコブ・ダグラス型ないしCES型で$-1<\rho<0$のときは、ゼロの定常状態は不安定であることが分かる。また、CES型で$\rho>0$のときは、ゼロの定常状態は安定であることが分かる。

よって、生産関数がコブ・ダグラス型ないしCES型で$-1<\rho<0$のときは、図3-2-1のように、プラスの定常状態k^*は安定である。また

図3-1-1　生産関数がコブ・ダグラス型、またはCES型で－1＜ρ＜0のとき

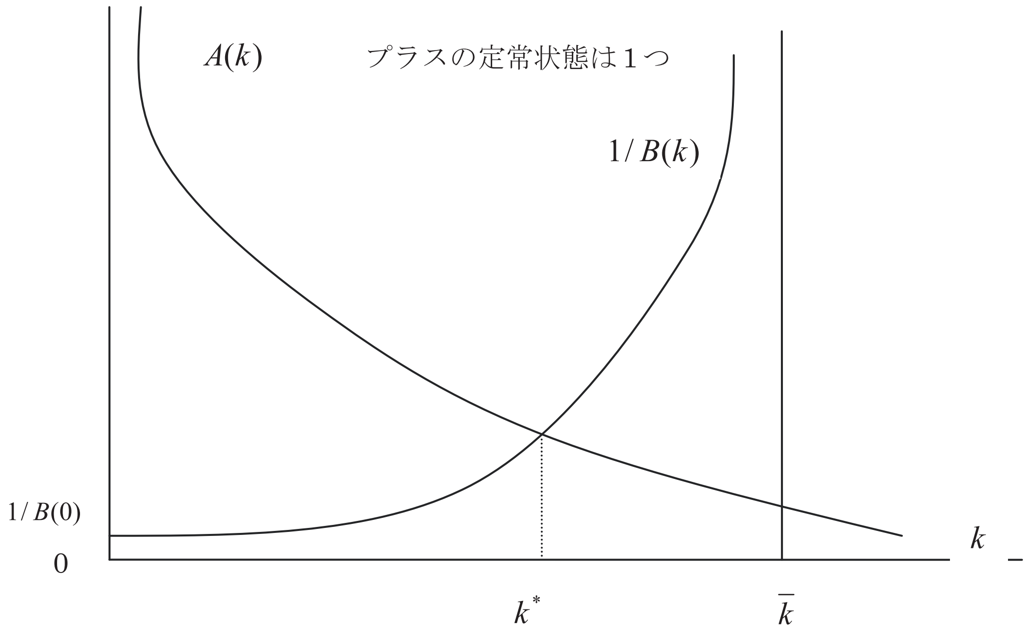


図3-1-2　生産関数がCES型でρ＞0のとき

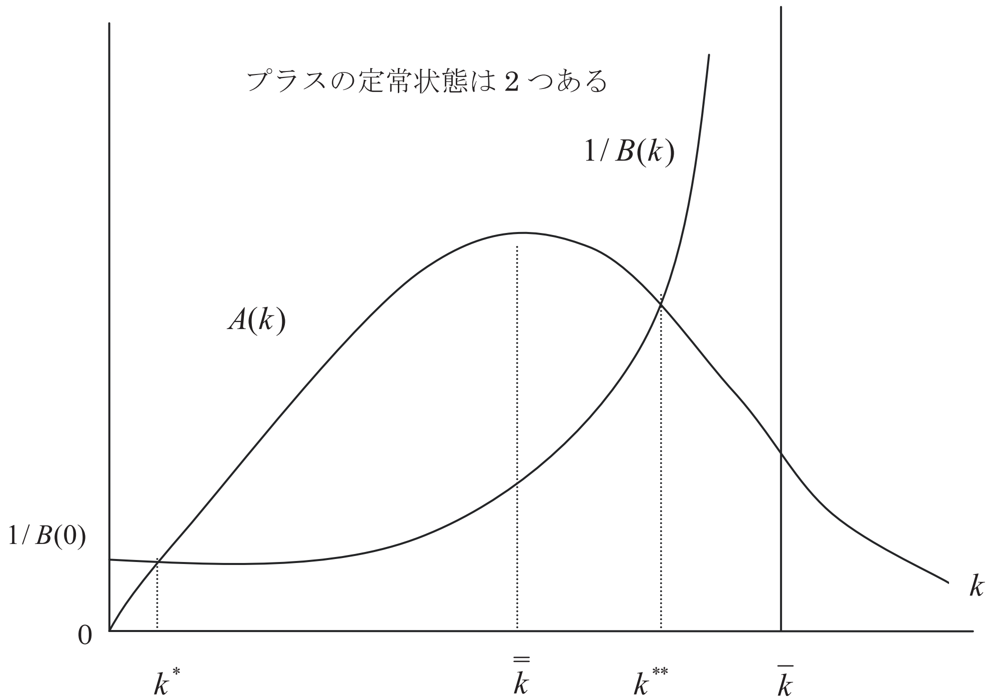


図3-2-1　安定なプラスの定常状態：
生産関数がコブ・ダグラス型、ないしCES型で－１＜ρ＜０のとき

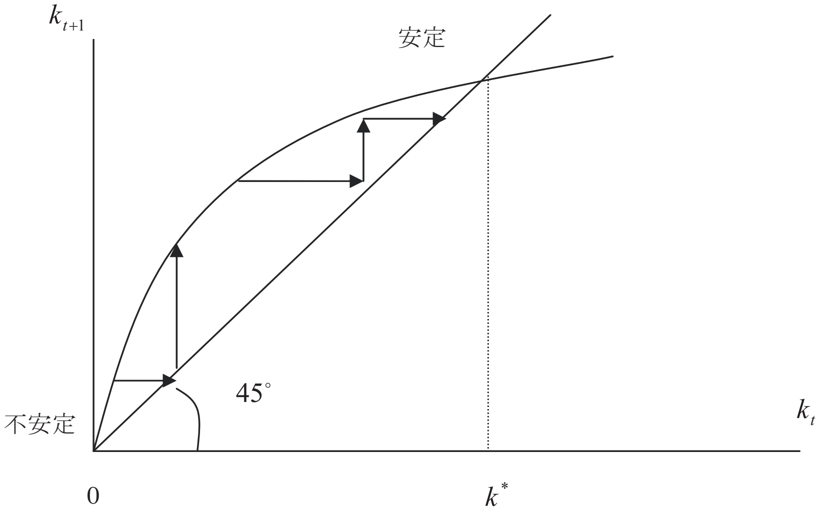
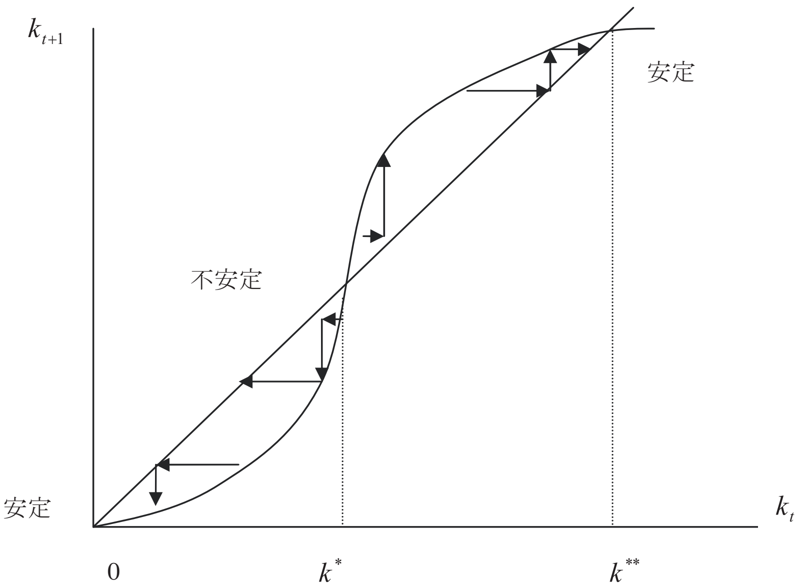


図3-2-2　複数均衡で、一方が安定、他方が不安定なプラスの定常状態：
生産関数がCES型でρ＞０のとき



48

CES 型で $\rho > 0$ のときは、図 3-2-2 のように、2 つあるプラスの定常状態のうち、小さい方 k^* は不安定、大きい方 k^{**} は安定であることが分かる。

(3) 標準バブルの導入：定常状態は鞍点

標準バブルが 0 期に M だけ導入されたとし、その財表示の価格を t 期に p_t とし、その全体としての価値を $B_t = Mp_t > 0$ とする。銀行預金との裁定の条件から $p_{t+1} = (1+r_{t+1})p_t$ だから、

(3-26) $B_{t+1} = (1+r_{t+1})B_t$

t 期生まれの消費者 1 人の t 期中の貯蓄を s_t とし、t 期生まれの人口 N_t 全体の合計を、$s_t N_t = S_{1t}$ とする。

第 1 節（2）(b) の（1-38）式で見たように、この貯蓄は、銀行に預金して、それが企業の t 期末 = $t+1$ 期首における資本保有 K_{t+1} に貸し付けられる部分と、バブル購入 B_t に向けられる部分とに分かれる。

(3-27) $S_{1t} = K_{t+1} + B_t$

t 期中における t 期生まれ消費者 N_t 人の 1 人当たりバブル購入を、

$$b_t = B_t / N_t$$

とおく。

(3-27) の両辺を N_t で割ると、(3-8) と同様に

$$s_t = (2+n)k_{t+1} + b_t$$

よって、

(3-28) $(2+n)k_{t+1} = s_t - b_t$

$u(c_t) = \log c_t$ の場合を考え、1 人当たり貯蓄関数を (3-15) 式と生産の限界条件 (3-11-1)、(3-11-2) で表示すると、(3-18) と同様に、

(3-29)

$$(2+n)k_{t+1} + \frac{1}{1+\beta}\frac{w(k_{t+1})}{1+r(k_{t+1})} = \frac{\beta}{1+\beta}w(k_t) - b_t$$

(3-26) から、

(3-30) $(1+n)b_{t+1} = (1+f'(k_{t+1}))b_t$

(3-29)、(3-30) 式は、k_t, b_t に関する定差方程式である。

(3-29) 式の左辺を l_{t+1} とおく。

$$l_{t+1} = (2+n)k_{t+1} + \frac{1}{1+\beta}\frac{w(k_{t+1})}{1+r(k_{t+1})}$$

(3-19) により、

$$\frac{dl_{t+1}}{dk_{t+1}} = 2+n - \frac{1}{1+\beta}\frac{f''(k_{t+1})(k_{t+1}+f(k_{t+1}))}{(1+f'(k_{t+1}))^2} > 0$$

よって、l_{t+1} は k_{t+1} の増加関数であり、$k_{t+1} = 0$ のとき $l_{t+1} = 0$ である。

ゆえに、k_{t+1} は、逆関数として、l_{t+1} の増加関数である。それを次の形に書く。

(3-31) $k_{t+1} = g(l_{t+1}), g'(l_{t+1}) > 0, g(0) = 0$

記号の簡単のために、賃金率 w_t、レンタル率 r_{t+1} は、再び

(3-32)
$$\begin{aligned} w_t &= w(k_t) = f(k_t) - f'(k_t)k_t \\ &= w(g(l_t)) = f(g(l_t)) - f'(g(l_t))g(l_t) \\ &= w(l_t) \end{aligned}$$

(3-33)
$$\begin{aligned} r_{t+1} &= r(k_{t+1}) = f'(k_{t+1}) \\ &= r(g(l_{t+1})) = f'(g(l_{t+1})) = r(l_{t+1}) \end{aligned}$$

と書く。すると、

$$\begin{aligned} w'(l) &= \frac{dw}{dl} = \frac{dw}{dk}\frac{dk}{dl} = -f''(k)k \cdot g'(l) \\ &= -f''(g(l))g(l)g'(l) > 0, l > 0, w'(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r'(l) &= \frac{dr}{dl} = \frac{dr}{dk}\frac{dk}{dl} = f''(k) \cdot g'(l) \\ &= f''(g(l)) \cdot g'(l) < 0 \end{aligned}$$

である。

このとき、(3-29)、(3-30) は、次のように、l_t と b_t に関する定差方程式になる。

(3-34) $l_{t+1} = \dfrac{\beta}{1+\beta}w(l_t) - b_t$

(3-35) $b_{t+1} = \dfrac{1}{1+n}(1+r(\dfrac{\beta}{1+\beta}w(l_t) - b_t))b_t$

これを差分の形で書くと、

(3-36) $l_{t+1} - l_t = \dfrac{\beta}{1+\beta}w(l_t) - l_t - b_t$

(3-37)

$$b_{t+1} - b_t = \frac{1}{1+n}\{-n + r(\frac{\beta}{1+\beta}w(l_t) - b_t)\}b_t$$

図3-3　標準バブルと鞍点経路

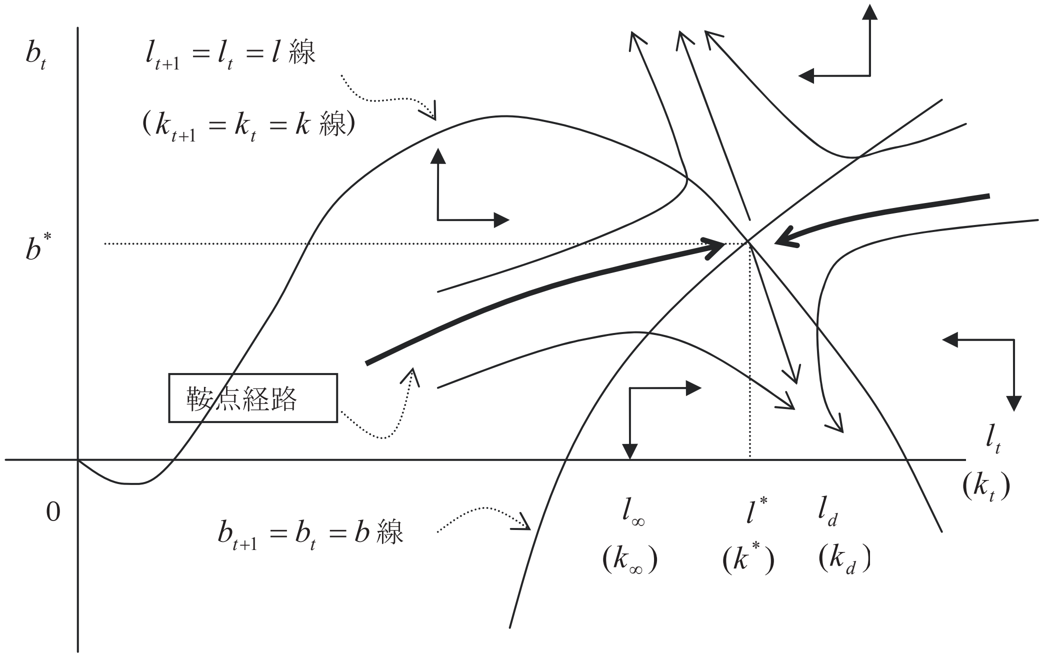
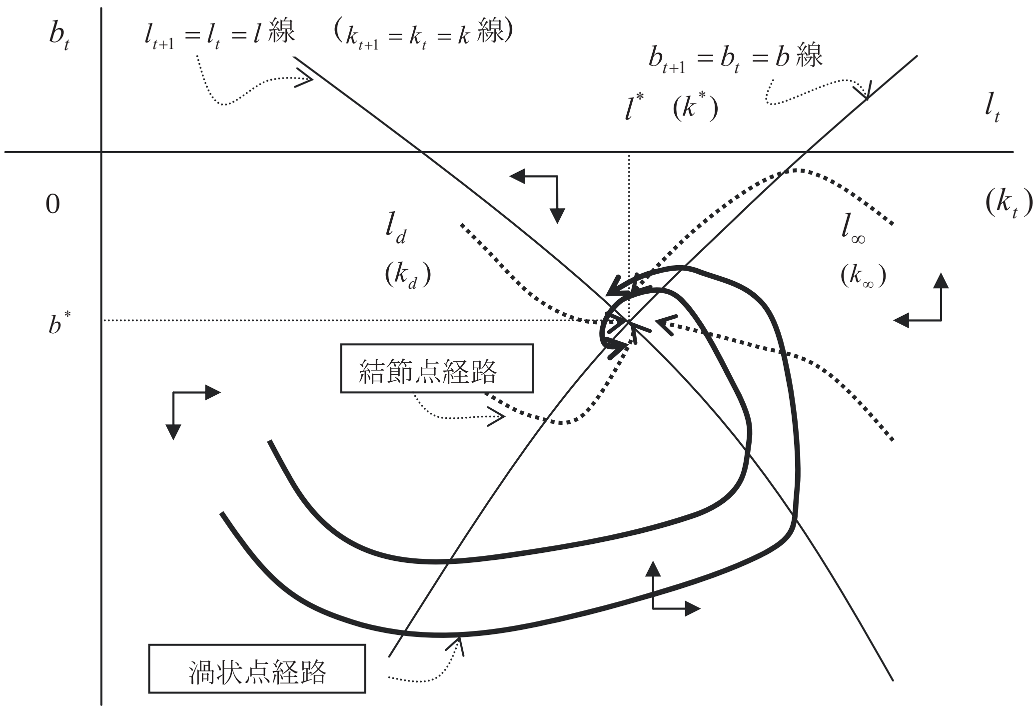


図3-4　信用バブルと渦状点または結節点経路



l_t, b_t 座標で、図 3-3 のように、この定差方程式の位相図を描く。

まず、$l_{t+1} = l_t = l$ 線は、

（3-38） $b = \dfrac{\beta}{1+\beta} w(l) - l$

$b = 0$ となる l の値を $l = l_d$ とすると、記号の簡単化に注意して、

$$w(l_d) = w(g(l_d)) = w(k_d)$$

となる k の値 $g(l_d) = k_d$ がある。これは、前項で分析した、バブルなしの場合の定常状態に対応し、2 つある場合はその 1 つとする。

$$\frac{db}{dl} = \frac{\beta}{1+\beta} w'(l) - 1$$

から、$\left.\dfrac{db}{dl}\right|_{l=0} < 0$

よって、$l_{t+1} = l_t = l$ 線は、$l = 0$ から出発するとき、当初　$b < 0$ の方向に向かう。

次に、$b_{t+1} = b_t = b$ 線は、

（3-39） $b = \dfrac{\beta}{1+\beta} w(l) - l_\infty$

ただし、l_∞ は、記号の簡単化に注意して、

$r(l_\infty) = r(g(l_\infty)) = r(k_\infty) = f'(k_\infty) = n$

となる定数である。

k_t, b_t 座標での位相図は、l_t, b_t 座標での位相図を横軸方向に伸縮したものになるから、分析の結果は同じである。

バブルがプラスで鞍点の定常状態として存在するのは、$l_\infty < l_d$、つまり $k_\infty < k_d$ のときになる。これは、バブルなしの定常状態において、金利が $f'(k_d) < f'(k_\infty) = n$ のときであり、経済は動学的に非効率なときである。このため、これまでは、バブルありの定常状態は、現実には起こらない、と解釈されてきた。

定常状態 (l^*, b^*) では、

$$\frac{\beta}{1+\beta} w(l^*) - l^* - b^* = 0$$

$$-n + r\left(\frac{\beta}{1+\beta} w(l^*) - b^*\right) = 0$$

が成り立っている。

この近傍で、定差方程式（3-36）、（3-37）をテーラー展開する。第 2 節のように、記号を $\Delta x_t = x_t - x^*$ と書く。すると、

$$\Delta l_{t+1} - \Delta l_t = \left(\frac{\beta}{1+\beta} w'(l^*) - 1\right)\Delta l_t - \Delta b_t$$

$$\Delta b_{t+1} - \Delta b_t = \frac{1}{1+n} r'(l^*)\left(\frac{\beta}{1+\beta} w'(l^*)\Delta l_t - \Delta b_t\right) b^*$$

よって、行列表現で次の $(\Delta l_t, \Delta b_t)$ に関する定数係数の定差方程式を得る。

（3-40） $\begin{pmatrix} \Delta l_{t+1} \\ \Delta b_{t+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta l_t \\ \Delta b_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta l_t \\ \Delta b_t \end{pmatrix}$

ここで、この行列を A とおき、

$$a_{11} = \frac{\beta}{1+\beta} w'(l^*) - 1, a_{12} = -1$$

$$a_{21} = \frac{1}{1+n} \cdot \frac{\beta}{1+\beta} r'(l^*) w'(l^*) b^*$$

$$a_{22} = -\frac{1}{1+n} r'(l^*) b^*$$

行列 A の固有方程式は、固有値を λ として、

（3-41） $\begin{aligned} &\varphi(\lambda) = \lambda^2 \\ &+ \left(-\frac{\beta}{1+\beta} w'(l^*) + 1 + \frac{1}{1+n} r'(l^*) b^*\right)\lambda \\ &+ \frac{1}{1+n} r'(l^*) b^* = 0 \end{aligned}$

標準バブルの場合は、$b^* > 0$ だから、定数項はマイナスである。よって、2 根は符号の異なる実根である。

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

ここで、

$$\varphi(-1) = |I + A| = \frac{\beta}{1+\beta} w'(l^*) > 0,$$

$$\varphi(0) = |A| = \frac{1}{1+n} r'(l^*) b^* < 0$$

だから、$-1 < \lambda_1 < 0$

固有値 λ_i に対応する固有ベクトルを

$$\begin{pmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \end{pmatrix}$$

とすると、定差方程式は、I を単位行列として、

(3-42) $$\begin{pmatrix} \Delta l_{t+1} \\ \Delta b_{t+1} \end{pmatrix} = (A+I) \begin{pmatrix} \Delta l_t \\ \Delta b_t \end{pmatrix}$$

と書け、$A+I$ の固有値は、$1+\lambda_i$、対応する固有ベクトルは同一となる。

この定差方程式の解は、a_1, a_2 を定数として、

(3-43) $$\begin{pmatrix} \Delta l_t \\ \Delta b_t \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} (1+\lambda_1)^t + a_2 \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \end{pmatrix} (1+\lambda_2)^t$$

となる。鞍点解では、$a_2 = 0$ でなければならない。

定常状態が 1 つの場合でも 2 つの場合でも、標準バブルの場合は、鞍点になると考えられる。

(4) 信用バブルの導入：定常状態は渦状点または結節点

信用バブルの場合は、第 1 節 (3) (b) の (1-55) 式で見たように、t 期の若年期の消費者は、t 期中の貯蓄 S_{1t} をすべて銀行に預金し、それが企業の t 期末 = $t+1$ 期首における資本保有に貸付られるのに加え、銀行から信用バブル B_t を借り入れ、それも企業の資本保有のために貸し付けるので、$t+1$ 期首の資本 K_{t+1} は、

(3-44) $K_{t+1} = S_{1t} + B_t, B_t > 0$

信用バブルは、追い貸し、借り換え、ロールオーバーされるので、

(3-45) $B_{t+1} = (1+r_{t+1})B_t$

が成り立つ。

このように信用バブルは、数学的には、標準バブルがマイナスの値をとる場合と同じである。従って、信用バブルの分析は、前の標準バブルの分析がそのまま適用出来、ただし 1 人当たりバブル b_t のマイナス部分に着目することになる。

もとの定差方程式 (3-36)，(3-37) の位相図において、(3-38) の $l_{t+1} = l_t = l$ 線の上方では l_t が減り、下方では増えることは同じである。しかし、

(3-39) の $b_{t+1} = b_t = b$ 線については、b_t がマイナスであるため、その上方では b_t が減り、下方では増えることになる。このため、定常状態は、渦状点または結節点になる。

これを代数的に見る。定常状態からの乖離 $(\Delta l_t, \Delta b_t)$ の動きを表わす定差方程式 (3-40) の行列 A の固有方程式 (3-41) は、b_t がマイナスのときは、定数項がプラスとなり、固有値が虚根ならば渦状点、符号の同じ実根ならば結節点になる。

判別式をとると、l^*, b^* が次の関係

$$\frac{1+n}{r'(l^*)}\left(\sqrt{\frac{\beta}{1+\beta} w'(l^*)} - 1\right)^2 > b^*$$

$$> \frac{1+n}{r'(l^*)}\left(\sqrt{\frac{\beta}{1+\beta} w'(l^*)} + 1\right)^2$$

にある場合は、判別式はマイナスとなり、固有値は虚根で、定差方程式の解は渦状点になる。その他の場合は、判別式はプラスで、解は結節点になる。(図 3-4、証明は付録 5.参照)

解が収束か発散かを見る。結節点の場合は、固有方程式 (3-41) において、

$$\varphi(0) > 0, \varphi(-1) > 0$$

だから、符号の同じ固有値を $\lambda_1 < \lambda_2$ とすると、$-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < 0$ のとき収束、その他のとき発散である。位相図から、結節点の場合に発散はあり得ないので、収束すると考えられる。

渦状点の場合は、虚根を、$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ とおくと、定差方程式の解が収束か発散かは、$1+\lambda = 1+\lambda_1 + i\lambda_2$ の絶対値が 1 より小さいか大きいか、で決まる。

$$(1+\lambda_1)^2 + \lambda_2^2 = \frac{\beta}{1+\beta} w'(l^*) = \left.\frac{\partial l_{t+1}}{\partial l_t}\right|_{l^*}$$

なので (証明は付録 5.参照)、

$\dfrac{\beta}{1+\beta} w'(l^*) < 1$ ならば収束、

$\dfrac{\beta}{1+\beta} w'(l^*) > 1$ ならば発散する。

信用バブルの渦状点または結節点としての定

常状態が存在するのは、位相図から、$l_d < l_\infty$つまり$k_d < k_\infty$のときであり、バブルなしの定常状態において、経済が動学的に効率的なときである。よって、標準バブルと異なり、信用バブルは現実に十分起こり得ることになる。

付表1-1　標準バブルの経済計算：寿命無限消費者の場合

家計0期首		家計0期中		家計0期中		家計　1期首	
資産	負債	所得	支出	資産の変動	負債の変動	資産	負債
銀行預金残高 V_0^S		賃金 $w_0 N_0$	消費 C_0	銀行預金 S_0^S		銀行預金残高 V_1^S	
	金融資産 V_0	銀行利子受取 $r_0 V_0^S$	貯蓄 S_0	バブル B_0		バブル残高 V_1^B	金融資産 V_1
$V_0 = V_0^S$		$S_0 = r_0 V_0 + w_0 N_0 - C_0 = S_0^S + B_0$ $S_0^S = r_0 V_0 + w_0 N_0 - C_0 - B_0 = I_0$ $S_0 = I_0 + B_0$		$B_0 = M p_0$		$V_1^S = V_0^S + S_0^S = (1+r_0) V_0^S + w_0 N_0 - C_0 - B_0$ $V_1^B = B_0$　　$V_1 = V_1^S + V_1^B$ $V_1 = (1+r_0) V_0 + w_0 N_0 - C_0$	
銀行0期首		銀行0期中		銀行0期中		銀行　1期首	
資産	負債	所得	支出	資産の変動	負債の変動	資産	負債
企業貸付残高 V_0^S	預金残高 V_0^S	企業より利子受取 $r_0 V_0^S$	家計へ利子支払 $r_0 V_0^S$	企業貸付 S_0^S	貯蓄 S_0^S	企業貸付残高 V_1^S	預金残高 V_1^S
企業0期首		企業0期中		企業0期中		企業1期首	
資産	負債	収入	支出	資産の変動	負債の変動	資産	負債
資本 K_0	銀行借入残高 V_0^S	生産所得 Y_0	賃金 $w_0 N_0$ 銀行利子支払 $r_0 V_0^S$	投資 I_0	銀行借入 S_0^S	資本 K_1	銀行借入残高 V_1^S
$K_0 = V_0^S = V_0$		$Y_0 = F(K_0, N_0) = r_0 K_0 + w_0 N_0$				$K_1 = K_0 + I_0 = V_1^S$ $K_1 = (1+r_0) K_0 + w_0 N_0 - C_0 - B_0$	
バブル発行元0期首		バブル発行元0期中		バブル発行元0期中		バブル発行元1期首	
資産	負債	所得	支出	資産の変動	負債の変動	資産	負債
バブル発行残高 0		バブル売上 B_0		財 B_0		財 B_0	

付表1-1（続き）　標準バブルの経済計算：寿命無限消費者の場合（続き）

家計1期首		家計1期中		家計1期中		家計2期首	
資産	負債	所得	支出	資産の変動	負債の変動	資産	負債
銀行預金残高 V_1^S		賃金 w_1N_1	消費 C_1	銀行預金 S_1^S		銀行預金残高 V_2^S	
バブル残高 V_1^B	金融資産 V_1	銀行利子受取 $r_1V_1^S$	貯蓄 S_1	バブル評価増 B_1-B_0		バブル残高 V_2^B	金融資産 V_2
$V_1^S=V_0^S+S_0^S=(1+r_0)V_0^S+w_0N_0-C_0-B_0$ $V_1^B=B_0$　$V_1=V_1^S+V_1^B$ $V_1=(1+r_0)V_0+w_0N_0-C_0$		$S_1=S_1^S=r_1V_1^S+w_1N_1-C_1=I_1$		$B_1-B_0=r_1B_0$		$V_2^S=V_1^S+S_1^S=(1+r_1)V_1^S+w_1N_1-C_1$ $V_2^B=B_1=(1+r_1)B_0=(1+r_1)V_1^B$ $V_2=V_2^S+V_2^B=(1+r_1)V_1+w_1N_1-C_1$	
銀行　1期首		銀行1期中		銀行1期中		銀行2期首	
資産	負債	所得	支出	資産の変動	負債の変動	資産	負債
企業貸付残高 V_1^S	預金残高 V_1^S	企業より利子受取 $r_1V_1^S$	家計へ利子支払 $r_1V_1^S$	企業貸付 S_1^S	貯蓄 S_1^S	企業貸付残高 V_2^S	預金残高 V_2^S
企業1期首		企業1期中		企業1期中		企業2期首	
資産	負債	収入	支出	資産の変動	負債の変動	資産	負債
資本 K_1	銀行借入残高 V_1^S	生産所得 Y_1	賃金 w_1N_1 銀行利子支払 $r_1V_1^S$	投資 I_1	銀行借入 S_1^S	資本 K_2	銀行借入残高 V_2^S
$K_1=K_0+I_0=V_1^S$ $K_1=(1+r_0)K_0+w_0N_0-C_0-B_0$		$Y_1=F(K_1,N_1)=r_1K_1+w_1N_1$				$K_2=K_1+I_1=V_2^S$ $K_2=(1+r_1)K_1+w_1N_1-C_1$	
バブル発行元1期首		バブル発行元1期中		バブル発行元1期中		バブル発行元2期首	
資産	負債	所得	支出	資産の変動	負債の変動	資産	負債
財 B_0						財 B_0	

付表1-2　標準バブルの経済計算：重複世代モデルの場合

若家計0期首		若家計0期中		若家計0期中		若家計1期首		若家計1期中		若家計1期中		若家計2期首	
資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債
		w_0N_{10}	C_{10}	S_{10}^S				w_1N_{11}	C_{11}	S_{11}^S			
			S_{10}	B_0					S_{11}	B_1			
		$S_{10}=w_0N_{10}-C_{10}=S_{10}^S+B_0=K_1+B_0$						$S_{11}=w_1N_{11}-C_{11}=S_{11}^S+B_1=K_2+B_1$				$B_1=(1+r_1)B_0$	
老家計0期首		老家計0期中		老家計0期中		老家計1期首		老家計1期中		老家計1期中		老家計2期首	
資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債
V_{20}^S		$r_0V_{20}^S$	C_{20}	$-V_{20}^S=-K_0$		$V_{21}^S=S_{10}^S$		$r_1V_{21}^S$	C_{21}	$-V_{21}^S$		$V_{22}^S=S_{11}^S$	
			S_{20}			$V_{21}^B=B_0$			S_{21}	$-V_{21}^B$		$V_{22}^B=B_1$	
$V_{20}^S=V_{20}=S_{1,-1}$		$C_{20}=(1+r_0)V_{20}^S$ $S_{20}=S_{20}^S=-V_{20}^S=-K_0$						$C_{21}=(1+r_1)(V_{21}^S+V_{21}^B)=(1+r_1)(K_1+B_0)$ $S_{21}=-K_1-B_0-r_1B_0$　$S_{21}^S=-V_{21}^S=-K_1$					
銀行0期首		銀行0期中		銀行0期中		銀行1期首		銀行1期中		銀行1期中		銀行2期首	
資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債
V_{20}^S	V_{20}^S	$r_0V_{20}^S$	$r_0V_{20}^S$	$S_{10}^S-K_0$	$S_{10}^S-K_0$	$V_{21}^S=S_{10}^S$	$V_{21}^S=S_{10}^S$	$r_1V_{21}^S$	$r_1V_{21}^S$	$S_{11}^S-K_1$	$S_{11}^S-K_1$	$V_{22}^S=S_{11}^S$	$V_{22}^S=S_{11}^S$
企業0期首		企業0期中		企業0期中		企業1期首		企業1期中		企業1期中		企業2期首	
資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債
K_0	V_{20}^S	Y_0	$r_0V_{20}^S$	I_0	$S_{10}^S-K_0$	K_1	$V_{21}^S=S_{10}^S$	Y_1	$r_1V_{21}^S$	I_1	$S_{11}^S-K_1$	K_2	$V_{22}^S=S_{11}^S$
			w_0N_{10}						w_1N_{11}				
		$Y_0=F(K_0,N_{10})$ $=r_0K_0+w_0N_{10}$		$I_0=K_1-K_0$ $S_{10}^S=K_1$				$Y_1=F(K_1,N_{11})$ $=r_1K_1+w_1N_{11}$		$I_1=K_2-K_1$ $S_{11}^S=K_2$			
バブル元0期首		バブル元0期中		バブル元0期中		バブル元1期首		バブル元1期中		バブル元1期中		バブル元2期首	
資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債
		B_0		B_0		B_0						B_0	

マクロの生産、所得、支出　$Y_0=F(K_0,N_{10})=r_0K_0+w_0N_{10}$　　$Y_1=F(K_1,N_{11})=r_1K_1+w_1N_{11}$

$Y_0=C_{20}-K_0+C_{10}+K_1+B_0=C_{10}+C_{20}+I_0+B_0$　　$Y_1=C_{21}-K_1-B_0-r_1B_0+C_{11}+K_2+B_1=C_{11}+C_{21}+I_1$

付表1-3　銀行貸し付けによる信用バブルの経済計算：寿命無限消費者の場合

家計0期首		家計0期中		家計0期中		家計　1期首		家計1期中		家計1期中		家計2期首	
資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債
V_0^S		w_0N_0	C_0	S_0^S	銀借 B_0	V_1^S	$V_1^B = B_0$	w_1N_1	C_1	S_1^S	銀借 $B_1 - B_0$	V_2^S	$V_2^B = B_1$
	V_0	$r_0V_0^S$	S_0	企貸 B_0		$V_1^B = B_0$	$V_1 = V_1^S$	$r_1V_1^S$	S_1	企貸 $B_1 - B_0$		$V_2^B = B_1$	$V_2 = V_2^S$
$V_0 = V_0^S$		$S_0 = r_0V_0 + w_0N_0 - C_0 = S_0^S$ $S_0 + B_0 = I_0$				$V_1^S = V_0^S + S_0^S$ $V_1^S = (1+r_0)V_0^S + w_0N_0 - C_0$		$S_1 = r_1V_1^S + w_1N_1 - C_1 = S_1^S$ $S_1 + B_1 - B_0 = I_1$		$B_1 = (1+r_1)B_0$ $B_1 - B_0 = r_1B_0$		$V_2^S = V_1^S + S_1^S$ $V_2^S = (1+r_1)V_1^S + w_1N_1 - C_1$	
銀行0期首		銀行0期中		銀行0期中		銀行　1期首		銀行1期中		銀行1期中		銀行2期首	
資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債
V_0^S	V_0^S	$r_0V_0^S$	$r_0V_0^S$	S_0^S	S_0^S	V_1^S	V_1^S	r_1K_1	$r_1V_1^S$	S_1^S	S_1^S	V_2^S	V_2^S
	K_{bank}			家貸 B_0		$V_1^B = B_0$	K_{bank}		$r_1V_1^B$	家貸 $B_1 - B_0$		$V_2^B = B_1$	K_{bank}
								$r_1K_1 = r_1(V_1^S + V_1^B)$ $r_1V_1^B = r_1B_0 = B_1 - B_0$				$V_2^B = (1+r_1)V_1^B$	
企業0期首		企業0期中		企業0期中		企業1期首		企業1期中		企業1期中		企業2期首	
資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債
K_0	V_0^S	Y_0	w_0N_0	I_0	S_0^S	K_1	V_1^S	Y_1	w_1N_1	I_1	S_1^S	K_2	V_2^S
			$r_0V_0^S$		家借 B_0		V_1^B		r_1K_1		家借 $B_1 - B_0$		$V_2^B = B_1$
		$Y_0 = F(K_0, N_0)$ $= r_0K_0 + w_0N_0$		$I_0 = S_0^S + B_0$		$K_1 = K_0 + I_0 = V_1^S + V_1^B$ $K_1 = (1+r_0)K_0 + w_0N_0 - C_0 + B_0$		$Y_1 = F(K_1, N_1)$ $= r_1K_1 + w_1N_1$		$I_1 = S_1^S + B_1 - B_0$		$K_2 = K_1 + I_1 = V_2^S + V_2^B$ $K_2 = (1+r_1)K_1 + w_1N_1 - C_1$	

マクロの生産、所得、支出

$Y_0 = F(K_0, N_0) = r_0K_0 + w_0N_0 = C_0 + S_0 = C_0 + I_0 - B_0$

$Y_0 + B_0 = C_0 + I_0$

$Y_1 = F(K_1, N_1) = r_1K_1 + w_1N_1 = r_1V_1^S + w_1N_1 + r_1V_1^B$

$Y_1 = C_1 + S_1^S + r_1V_1^B$

$Y_1 = C_1 + I_1$

付表1-4　銀行貸し付けによる信用バブルの経済計算：重複世代モデルの場合

若家計0期首		若家計0期中		若家計0期中		若家計1期首		若家計1期中		若家計1期中		若家計2期首	
資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債
		w_0N_{10}	C_{10} S_{10}	S^S_{10} 企貸 B_0	銀借 B_0			w_1N_{11}	C_{11} S_{11}	S^S_{11} 企貸 B_1	銀借 B_1		
		$S_{10}=w_0N_{10}-C_{10}=S^S_{10}=K_1-B_0$						$S_{11}=w_1N_{11}-C_{11}=S^S_{11}=K_2-B_1$			$B_1=(1+r_1)B_0$		
老家計0期首		老家計0期中		老家計0期中		老家計1期首		老家計1期中		老家計1期中		老家計2期首	
資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債
V^S_{20}		$r_0V^S_{20}$	C_{20} S_{20}	$-V^S_{20}=-K_0$		$V^S_{21}=S^S_{10}$ $V^B_{21}=B_0$	$V^B_{21}=B_0$	$r_1V^S_{21}$ $r_1V^B_{21}$	C_{21} $r_1V^B_{21}$ S_{21}	$-V^S_{21}$ $-V^B_{21}=-B_0$	$-V^B_{21}=-B_0$	$V^S_{22}=S^S_{11}$ $V^B_{22}=B_1$	$V^B_{22}=B_1$
$V^S_{20}=V_{20}=S_{1,-1}$		$C_{20}=(1+r_0)V^S_{20}$		$S_{20}=S^S_{20}=-V^S_{20}=-K_0$				$C_{21}=(1+r_1)V^S_{21}$		$S_{21}=-V^S_{21}=-K_1+B_0$			
銀行0期首		銀行0期中		銀行0期中		銀行1期首		銀行1期中		銀行1期中		銀行2期首	
資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債
V^S_{20}	V^S_{20} K_{bank}	$r_0V^S_{20}$	$r_0V^S_{20}$	$S^S_{10}-K_0$ B_0	$S^S_{10}-K_0$	$V^S_{21}=S^S_{10}$ $V^B_{21}=B_0$	$V^S_{21}=S^S_{10}$ K_{bank}	$r_1V^S_{21}$ $r_1V^B_{21}$	$r_1V^S_{21}$	$S^S_{11}-V^S_{21}$ B_1-B_0	$S^S_{11}-V^S_{21}$ B_1-B_0	$V^S_{22}=S^S_{11}$ $V^B_{22}=B_1$	$V^S_{22}=S^S_{11}$ K_{bank}
企業0期首		企業0期中		企業0期中		企業1期首		企業1期中		企業1期中		企業2期首	
資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債	所得	支出	資産変動	負債変動	資産	負債
K_0	V_{20}	Y_0	r_0V_{20} w_0N_{10}	I_0	$S^S_{10}+B_0-K_0$	K_1	$V^S_{21}=S^S_{10}$ $V^B_{21}=B_0$	Y_1	$r_1(V^S_{21}+V^B_{21})$ w_1N_{11}	I_1	$S^S_{11}-V^S_{21}$ B_1-B_0	K_2	$V^S_{22}=S^S_{11}$ $V^B_{22}=B_1$
		$Y_0=F(K_0,N_{10})$ $=r_0K_0+N_{10}$		$I_0=K_1-K_0$ $S^S_{10}+B_0=K_1$				$I_1=S^S_{11}+B_1-(V^S_{21}+B_0)=S^S_{11}+B_1-K_1$ $S^S_{11}+B_1=K_2$					

マクロの生産、所得、支出

$$Y_0=F(K_0,N_{10})=r_0K_0+w_0N_{10}$$
$$Y_0=C_{20}-K_0+C_{10}+K_1-B_0$$
$$Y_0+B_0=C_{10}+C_{20}+I_0$$

$$Y_1=F(K_1,N_{11})=r_1K_1+w_1N_{11}=r_1V^S_{21}+r_1V^B_{21}+C_{11}+S^S_{11}$$
$$Y_1=C_{21}-K_1+B_0+r_1B_0+C_{11}+I_1-B_1+K_1$$
$$Y_1=C_{11}+C_{21}+I_1$$