不安定性とバブルのマクロ経済理論
— 標準理論から一歩踏み出す試み —（下）

小　島　祥　一

目次

4.　3世代、T世代重複世代モデルへの拡張とラムゼー・モデルの再現

前節で若年期、老年期とも働く2世代重複世代モデルを1時点効用関数$u(c_t)=\log c_t$の場合に分析した。この節では、その自然な拡張として、生まれて若年期、中年期に働き、老年期には働かず貯蓄を取り崩して消費し死ぬ、3世代重複世代モデルを分析する。

1時点効用関数が$u(c_t)=\log c_t$の場合には、各世代の1人の消費者の消費が、生涯所得に各世代の消費性向をかけたものになる。生涯所得は賃金率と金利の関数であり、これらは1人当たり資本の関数なので、1人の消費者の消費は、1人当たり資本の関数として表わされる。

よって、予算制約式から、各世代の各時点での1人当たり金融資産が1人当たり資本の関数として表わされる。そのマクロ経済的な集計量として、マクロの1人当たり金融資産が、マクロの1人当たり資本の関数として表わされる。

このやり方は、3世代モデルからT世代モデルにただちに一般化出来る。解が複数均衡になる様子は、前節の2世代モデルと同じである。安定性の分析は、3世代モデルでは前節と同様に出来るが、T世代モデルでは複雑になり難しい。しかしTが大きい場合には、1人の消費者について成り立つオイラー方程式と予算制約式を直接マクロ的に集計し、マクロの集計量としての消費、金融資産の満たすべき関係式を導き、分析することが出来る。これによれば、Tが大きいときは、ラムゼー・モデルで近似されることが分かる。

(1) 3世代重複世代モデルの分析

(a) バブルなしの場合の定常状態

時間を$t=0,1,2,...$とし、各$s=0,1,2,...$につき、s期首に生まれる人口をN_sとし、人口増加率をnとすると、$N_{s+1}=(1+n)N_s$

s期生まれの1人の消費者は、s期が若年期、$s+1$期が中年期、$s+2$期が老年期で、s期、$s+1$期に企業で働き、労働所得を稼ぎ、消費し、貯蓄し、$s+2$期には退職して働かず、元利を含む貯蓄を取り崩して消費し、$s+2$期末に死ぬ。0期首には、0期生まれの若世代、−1期生まれの中世代、−2期生まれの老世代がいる。

$s=0,1,2,...$につき、s期生まれの1人の消費者は、生涯の金利$r_{s+t},t=0,1,2$、賃金率$w_{s+t},t=0,1$を所与とし、生涯の消費$c_{s,s+t},t=0,1,2$から得られる生涯効用U_sを、各期の予算制約のもとで、$s+t$期首の金融資産$v_{s,s+t},t=1,2$を調節しながら、最大化を図る。

(4-1) $\max U_s=\sum_{t=0}^{2}\beta^t\log c_{s,s+t}$

(4-2) $c_{s,s+t}+v_{s,s+t+1}=w_{s,s+t}+(1+r_{s+t})v_{s,s+t},$
$t=0,1,2$

ただし$\beta=1/(1+\theta)$、$0<\theta<1$は時間選好率、
$v_{s,s+t},t=0,1,2,3$は$s+t$期首の金融資産で
$v_{s,s}=0,v_{s,s+3}=0$、
$s+t$期に稼ぐ賃金率$w_{s,s+t},t=0,1,2$は、$w_{s,s}=w_s,w_{s,s+1}=w_{s+1},w_{s,s+2}=0$とおく。

ラグランジアンをL_s、ラグランジュ乗数を$\lambda_{s,s+t}>0,t=0,1,2$とすると、

(4-3)

$$L_s=\sum_{t=0}^{2}\beta^t\log c_{s,s+t}$$
$$+\sum_{t=0}^{2}\lambda_{s,s+t}\{w_{s,s+t}+(1+r_{s+t})v_{s,s+t}-c_{s,s+t}-v_{s,s+t+1}\}$$

1階の条件

$$\frac{\partial L_s}{\partial c_{s,s+t}}=\frac{\beta^t}{c_{s,s+t}}-\lambda_{s,s+t}=0,t=0,1,2$$

$$\frac{\partial L_s}{\partial v_{s,s+t+1}}=-\lambda_{s,s+t}+\lambda_{s,s+t+1}(1+r_{s+t+1})=0,t=0,1$$ から

$$\frac{\lambda_{s,s+t}}{\lambda_{s,s+t+1}}=1+r_{s+t+1}$$

$$\frac{c_{s,s+t+1}}{c_{s,s+t}}=\frac{\beta\lambda_{s,s+t}}{\lambda_{s,s+t+1}}=\beta(1+r_{s+t+1}),t=0,1$$

ゆえに、オイラー方程式は

(4-4) $$\frac{c_{s,s+t}}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_{s+i})}=\beta^t c_{s,s},t=1,2$$

$\prod_{i=1}^{0}a_i=1$として、生涯予算制約式は、

(4-5) $$\sum_{t=0}^{2}\frac{c_{s,s+t}}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_{s+i})}=\sum_{t=0}^{2}\frac{w_{s,s+t}}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_{s+i})}$$
$$=\sum_{t=0}^{1}\frac{w_{s+t}}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_{s+i})}=h_{s,s}$$

ここに、$h_{s,s}$は生涯労働所得である。

よって、 $\gamma=\frac{1}{\sum_{t=0}^{2}\beta^t}=\frac{1}{1+\beta+\beta^2}$ とおいて

(4-6) $$\frac{c_{s,s+t}}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_{s+i})}=\beta^t\gamma h_{s,s},t=0,1,2$$

s期生まれの1人の消費者の各期の消費は、現在および将来の金利と賃金率で決まる。

生まれてからt期目の消費の、生まれた時点sにおける現在価値は、生涯労働所得$h_{s,s}$に、消費性向$\beta^t\gamma$をかけたものになる。

s期生まれの1人の消費者の予算制約式(4-2)から、$\tau=1,2$について、$s+\tau$期の金融資産は、それ以降の生涯の消費と労働所得との差である。

$$\sum_{t=\tau}^{2}\frac{c_{s,s+t}-w_{s,s+t}}{\prod_{i=0}^{t-\tau}(1+r_{s+\tau+i})}=\sum_{t=\tau}^{2}\frac{(1+r_{s+t})v_{s,s+t}-v_{s,s+t+1}}{\prod_{i=0}^{t-\tau}(1+r_{s+\tau+i})}$$

$$=v_{s,s+\tau}+\sum_{t=\tau+1}^{2}\frac{v_{s,s+t}}{\prod_{i=0}^{t-\tau-1}(1+r_{s+\tau+i})}-\sum_{t=\tau}^{1}\frac{v_{s,s+t+1}}{\prod_{i=0}^{t-\tau}(1+r_{s+\tau+i})}$$

$$=v_{s,s+\tau}$$

よって(4-6)から、

(4-7)

$$v_{s,s+\tau}=\prod_{i=1}^{\tau-1}(1+r_{s+i})\sum_{t=\tau}^{2}\frac{c_{s,s+t}-w_{s,s+t}}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_{s+i})}$$

$$=\prod_{i=1}^{\tau-1}(1+r_{s+i})\left(\sum_{t=\tau}^{2}\beta^t\gamma h_{s,s}-\sum_{t=\tau}^{2}\frac{w_{s,s+t}}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_{s+i})}\right)$$

よって、$\tau=1,2$ について、

$$v_{s,s+1}=\sum_{t=1}^{2}\beta^t\gamma h_{s,s}-\frac{w_{s+1}}{1+r_{s+1}}$$

(4-8) $$=(1-\gamma)(w_s+\frac{w_{s+1}}{1+r_{s+1}})-\frac{w_{s+1}}{1+r_{s+1}}$$

$$=(1-\gamma)w_s-\gamma\frac{w_{s+1}}{1+r_{s+1}}$$

(4-9) $$v_{s,s+2}=(1+r_{s+1})\beta^2\gamma h_{s,s}$$

中年期の金融資産は、若年期の労働所得のうち消費せずに貯蓄したものと、若年期の消費に回すために、中年期の労働所得を担保にして借り入れたものの要返済額との差額でもある。

老年期の金融資産は、生涯所得のうち、若年期、中年期の消費ですでに支出したものの残りとして、老年期の消費に回すために貯蓄したものでもある。

以上から、t 期における経済全体の金融資産 V_t は、$t-1$期生まれと $t-2$ 期生まれの消費者全体の t 期における金融資産の合計として、

$$V_t=\sum_{\tau=1}^{2}v_{t-\tau,t}N_{t-\tau}$$

(4-10) $$=\left((1-\gamma)w_{t-1}-\gamma\frac{w_t}{1+r_t}\right)N_{t-1}+\beta^2\gamma\left((1+r_{t-1})w_{t-2}+w_{t-1}\right)N_{t-2}$$

バブルなしの場合は、t 期首の金融資産は、すべて企業の資本保有 K_t のための貸し付けになっているから、

(4-11) $V_t=K_t$

t 期における全人口を N_{0t}、労働人口を N_{Lt} とすると、

$$N_{0t}=\sum_{i=0}^{2}N_{t-i}=\sum_{i=0}^{2}\frac{1}{(1+n)^i}N_t=\frac{1}{n_0}N_t$$

ここで $n_0=\frac{N_t}{N_{0t}},\frac{1}{n_0}=\sum_{i=0}^{2}\frac{1}{(1+n)^i}$ とおく。

$$N_{Lt}=\sum_{i=0}^{1}N_{t-i}=\sum_{i=0}^{1}\frac{1}{(1+n)^i}N_t=\frac{2+n}{1+n}N_t$$

よって t 期における人口 1 人当たり金融資産を $v_t=V_t/N_{0t}$、労働人口 1 人当たり資本を $k_t=K_t/N_{Lt}$、労働人口比率を

$n_L=N_{Lt}/N_{0t}$ とすると、 $v_t=n_Lk_t$

ここで

$n_1=N_{t-1}/N_{0t}=N_{t-1}/N_{0,t-1}\cdot N_{0,t-1}/N_{0t}$

$=n_0/(1+n)$

$n_2=N_{t-2}/N_{0t}=N_{t-2}/N_{t-1}\cdot N_{t-1}/N_{0t}$

$=n_1/(1+n)=n_0/(1+n)^2$

とおくと、これと(4-10)から、

(4-12)

$$n_Lk_t=v_t=-n_1\gamma\frac{w_t}{1+r_t}+\{n_1(1-\gamma)+n_2\beta^2\gamma\}w_{t-1}$$

$$+n_2\beta^2\gamma(1+r_{t-1})w_{t-2}$$

ここで

$\beta_1=n_2\beta^2\gamma/n_L,\beta_2=\{n_1(1-\gamma)+n_2\beta^2\gamma\}/n_L,$

$\beta_3=n_1\gamma/n_L$

とおき、生産の限界条件

$$w_t = f(k_t) - f'(k_t)k_t = w(k_t),$$
$$r_t = f'(k_t) = r(k_t)$$

を使うと、k_t についての定差方程式を得る。

(4-13)

$$k_t = \frac{v_t}{n_L}$$
$$= \beta_1(1+r(k_{t-1}))w(k_{t-2}) + \beta_2 w(k_{t-1}) - \beta_3 \frac{w(k_t)}{1+r(k_t)}$$

定常状態を $k_t = k_{t-1} = k_{t-2} = k$ とすると、

$$k = w(k)\{\beta_1(1+r(k)) + \beta_2 - \frac{\beta_3}{1+r(k)}\}$$

$k=0$ は定常状態である。$k>0$ については、

(4-14)

$$\left(\frac{f(k)}{k} - f'(k)\right)\left(\beta_1(1+f'(k)) + \beta_2 - \frac{\beta_3}{1+f'(k)}\right) = 1$$

ここで

$$A(k) = \frac{f(k)}{k} - f'(k),$$
$$B(k) = \beta_1(1+f'(k)) + \beta_2 - \frac{\beta_3}{1+f'(k)}$$

とおくと、定常状態は、

$$A(k) = \frac{1}{B(k)}$$

となる点である。$A(k)$ については、CES 生産関数の場合について、前節ですでに分析した。

$B(k)$ は

$$B(0) = \infty$$

(4-15)

$$B(\infty) = \beta_1 + \beta_2 - \beta_3$$
$$= \frac{n_0\gamma}{(1+n)^2 n_L}\{(n+3)\beta^2 + (1+n)\beta - (1+n)\} > 0$$

この不等式(4-15)が成り立つのは、

$$\beta = \frac{1}{1+\theta}, 0 < \theta < 1, \frac{1}{2} < \beta < 1$$
$$n < 1$$

で、{}内の β の 2 次関数がプラスなことによる。

不等式(4-15)は、(4-13)において、賃金率が一定、ゼロ金利のときに、マクロの家計の金融資産が、貯蓄残高マイナス借り入れ残高で、ネットでプラスになることを表わしている。当然のようだが、証明は微妙なものがある。

$$B'(k) = \beta_1 f''(k) + \frac{\beta_3 f''(k)}{(1+f'(k))^2} < 0$$

よって、前節の図 3-1-1,2 と同様に、図 4-1-1,2,3 を得る。CES 型生産関数で、$\rho > 0$ の場合には、定常状態が複数均衡の可能性がある。

(b) バブルなしの場合の定常状態の安定性

定常状態の安定性をみるため、前節と同様に、

(4-16) $$l_t = k_t + \beta_3 \frac{w(k_t)}{1+r(k_t)}$$

とおき、l_t は k_t の増加関数なので、この逆関数も増加関数であり、それを $k_t = g(l_t)$ とおく。すると、前節(3-32),(3-33)のように記法を簡単化して、

$$l_t = \beta_1(1+r(l_{t-1}))w(l_{t-2}) + \beta_2 w(l_{t-1})$$

つまり、

$$l_{t+2} = \beta_1(1+r(l_{t+1}))w(l_t) + \beta_2 w(l_{t+1})$$

これは l_t についての 2 階の定差方程式である。前節でみたように、

$$w'(l) > 0, r'(l) < 0$$

$l_t^1 = l_{t+1}$ とおくと、l_t, l_t^1 についての 1 階の定差方程式になる。

(4-17) $$\begin{aligned} l_{t+1}^1 &= \beta_1(1+r(l_t^1))w(l_t) + \beta_2 w(l_t^1) \\ l_{t+1} &= l_t^1 \end{aligned}$$

差分の形に書くと、

(4-18) $$\begin{aligned} l_{t+1}^1 - l_t^1 &= \beta_1(1+r(l_t^1))w(l_t) + \beta_2 w(l_t^1) - l_t^1 \\ l_{t+1} - l_t &= l_t^1 - l_t \end{aligned}$$

定常状態を $l_t = l^*, l_t^1 = l^*$ とすると、

(4-19) $$\beta_1(1+r(l^*))w(l^*) + \beta_2 w(l^*) - l^* = 0$$

が成り立つ。定常状態が 2 つある場合は、そのうちの 1 つとする。このまわりでテーラー展開すると、$\Delta l_t = l_t - l^*$ などとおいて、

$$\Delta l_{t+1}^1 - \Delta l_t^1 = \beta_1\{r'(l^*)w(l^*)\Delta l_t^1 + (1+r(l^*))w'(l^*)\Delta l_t\}$$
$$+ (\beta_2 w'(l^*) - 1)\Delta l_t^1$$

図4-1-1　コブ・ダグラスまたは
CES生産関数で −1< ρ <0 のとき：
プラスの定常状態は1つ

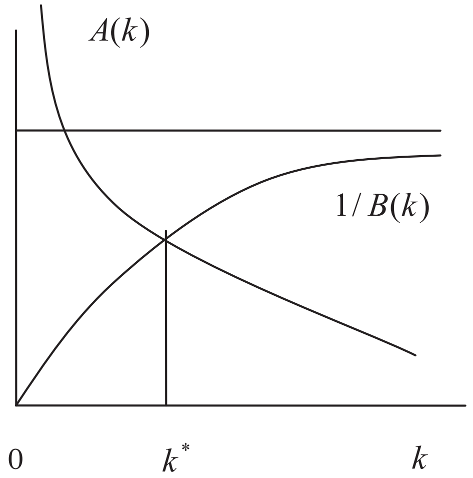


図4-1-2　CES生産関数で ρ >0 でも、
プラスの定常状態が1つのとき

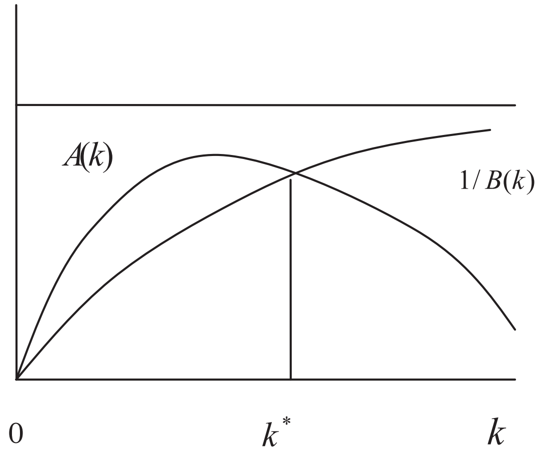
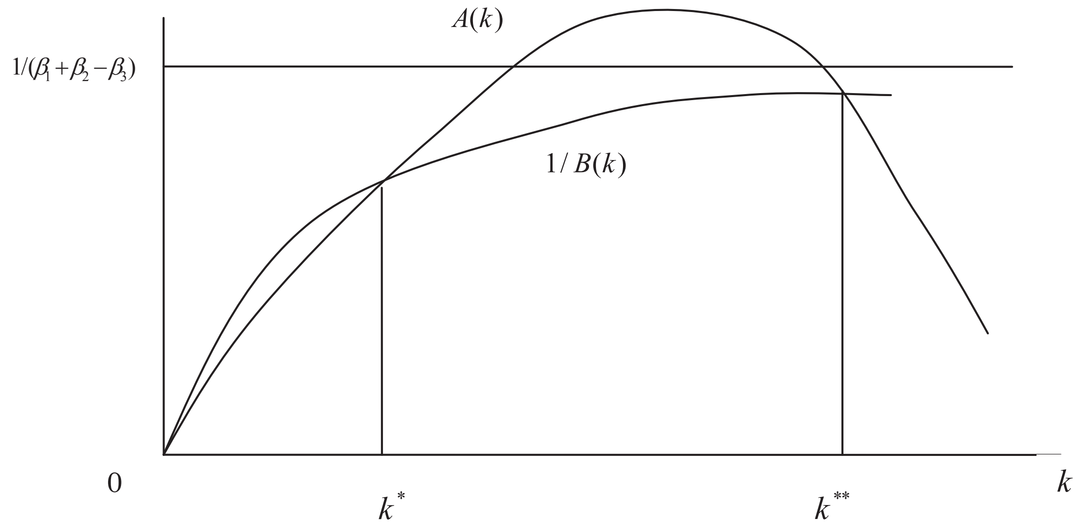


図4-1-3　CES型生産関数で ρ >0 で
プラスの定常状態が2つのとき



$$\Delta l_{t+1} - \Delta l_t = \Delta l_t^1 - \Delta l_t$$

これを行列形式で書くと、

$$\text{(4-20)} \quad \begin{pmatrix} \Delta l_{t+1}^1 \\ \Delta l_{t+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta l_t^1 \\ \Delta l_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta l_t^1 \\ \Delta l_t \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = \beta_1 r'(l^*) w(l^*) + \beta_2 w'(l^*) - 1$$
$$a_{12} = \beta_1 (1 + r(l^*)) w'(l^*) > 0$$
$$a_{21} = 1, a_{22} = -1$$

$\Delta l_t, \Delta l_t^1$ 座標、つまり $\Delta l_t, \Delta l_{t+1}$ 座標で定差方程式(4-17)の位相図を描くと、図 4-2-1,2,3,4 のようになる。

$\Delta l_{t+1} = \Delta l_t$ 線は、45 度線であり、その上方では Δl_t は増加し、その下方では減少する。

$\Delta l_{t+1}^1 = \Delta l_t^1$ 線は、$a_{11} > 0$ のときは、傾きがマイナスで、その上方では Δl_t^1 は増加し、その下方では減少する。もし傾きがマイナスの分枝の傾きの絶対値が 1 未満ならば、図 4-2-1 のように、定常状態は鞍点になる。しかし傾きがマイナスの分枝の傾きの絶対値が 1 を超えるならば、図 4-2-2 のように、鞍点とならずに発散する。これは、離散的な動きのため、方向は原点の方向に向かっていても、原点を行き過ぎてしまうためである。

$a_{11} < 0$ のときは、$a_{11} + a_{12} > 0$ ならば、$\Delta l_{t+1}^1 = \Delta l_t^1$ 線は、45 度線の上方にあり、もし傾きがマイナスの分枝の傾きの絶対値が 1 未満ならば、図 4-2-3 のように、定常状態は鞍点になる。

$a_{11} < 0$ かつ $a_{11} + a_{12} < 0$ ならば、$\Delta l_{t+1}^1 = \Delta l_t^1$ 線は 45 度線の下方にくるため、もし $2 + a_{11} - a_{12} > 0$ の条件が成り立ち、傾きがマイナスの分枝の傾きの絶対値が 1 未満ならば、図 4-2-4 のように、定常状態は結節点になる。(付録 6.参照)

以上から、3 世代複合世代モデルによるバブルなしの場合の定常状態 l^* ないし k^* は、l_t, l_{t+1} 座標ないし k_t, k_{t+1} 座標において、$2 + a_{11} - a_{12} > 0$ の条件のもとで、$a_{11} > 0$ のときや $a_{11} < 0$ で $a_{11} + a_{12} > 0$ のときは、鞍点であり、$a_{11} < 0$ で $a_{11} + a_{12} < 0$ のときは、収束する結節点である。その他の場合には発散する。

定常状態が 1 つの場合は、収束するケースがあてはまり、2 つの場合は、1 つが収束するケース、もう 1 つが発散するケースになると考えられる。

(c) バブルありの場合

3 世代重複世代モデルにバブルを入れるには、(4-11)に戻り、(1-38)にならって、$t+1$ 期首の金融資産 V_{t+1} は、$t+1$ 期首における企業の資本保有 K_{t+1} のための貸し付けと、t 期中に購入したバブル B_t からなるとする。

$$\text{(4-21)} \quad V_{t+1} = K_{t+1} + B_t$$

ここで $v_{t+1} = V_{t+1} / N_{0,t+1}$、$k_{t+1} = K_{t+1} / N_{1,t+1}$、$b_t = B_t / N_{0t}$ として、両辺を N_{0t} で割って、1 人当たり変数に変換する。前と同様に、

$N_{0,t+1} / N_{0t} = 1 + n$、

$$N_{L,t+1} / N_{0t} = N_{L,t+1} / N_{0,t+1} \cdot N_{0,t+1} / N_{0t}$$
$$= (1+n) n_L$$

とおいて、

$$(1+n) v_{t+1} = (1+n) n_L k_{t+1} + b_t$$

よって、

$$\text{(4-22)} \quad k_{t+1} = \frac{1}{n_L} v_{t+1} - \frac{1}{n_L (1+n)} b_t$$

(4-13)、(4-14)と同様にして、

$$\text{(4-23)} \quad \begin{aligned} k_{t+1} &= \beta_1 (1 + r(k_t)) w(k_{t-1}) + \beta_2 w(k_t) \\ &- \beta_3 \frac{w(k_{t+1})}{1 + r(k_{t+1})} - \frac{1}{n_L (1+n)} b_t \end{aligned}$$

バブルの定差方程式は、

$$\text{(4-24)} \quad B_{t+1} = (1 + r_{t+1}) B_t$$

両辺を N_{0t} で割って、1 人当たりバブルの式は、

$$(1+n) b_{t+1} = (1 + r_{t+1}) b_t$$

よって、

$$\text{(4-25)} \quad b_{t+1} = \frac{1 + r(k_{t+1})}{1+n} b_t$$

図4-2-1　鞍点となるとき

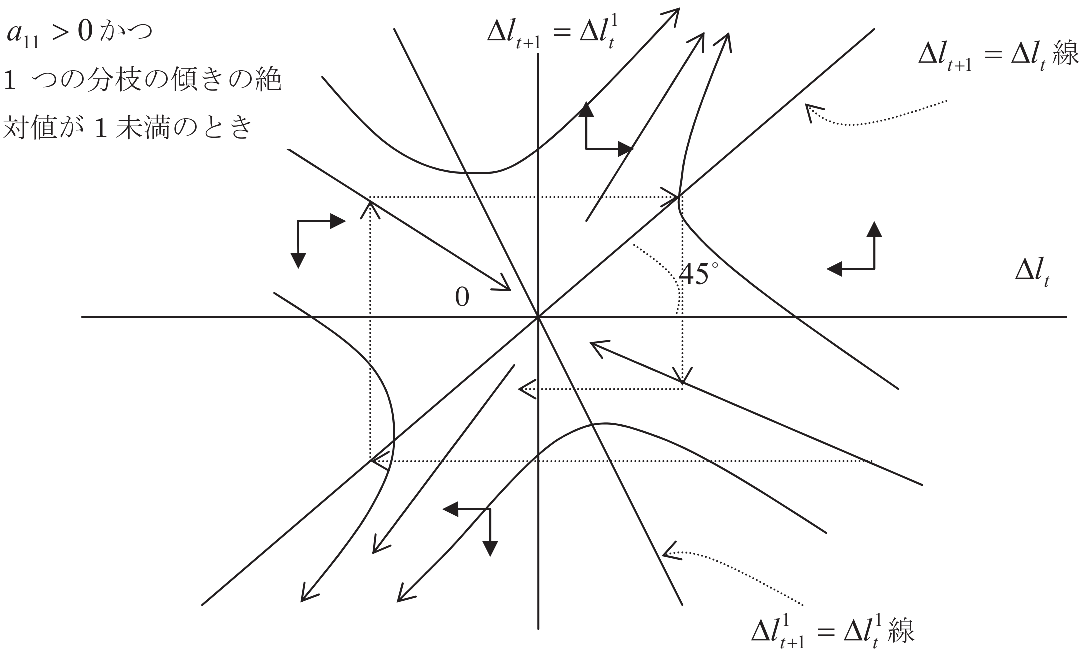


図4-2-2　鞍点とならずに発散するとき

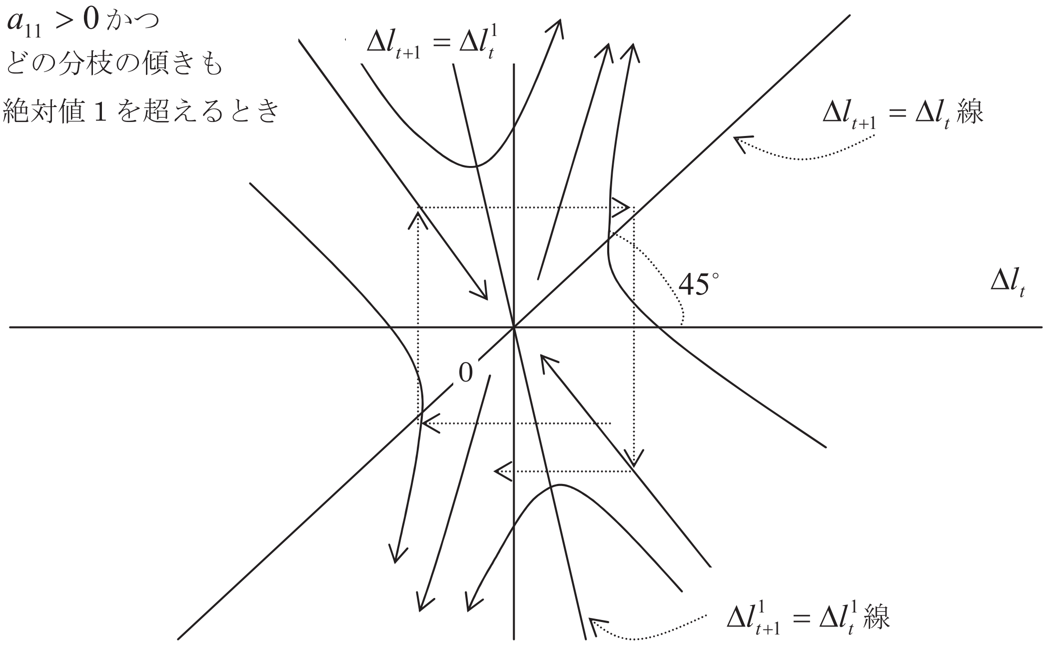


図4-2-3　鞍点となるとき

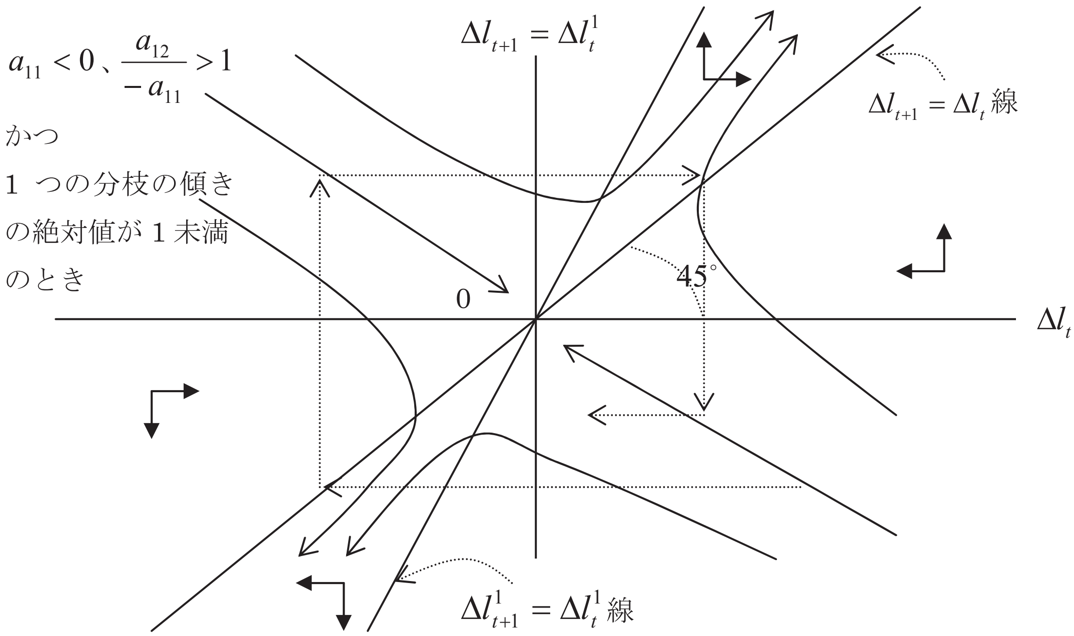
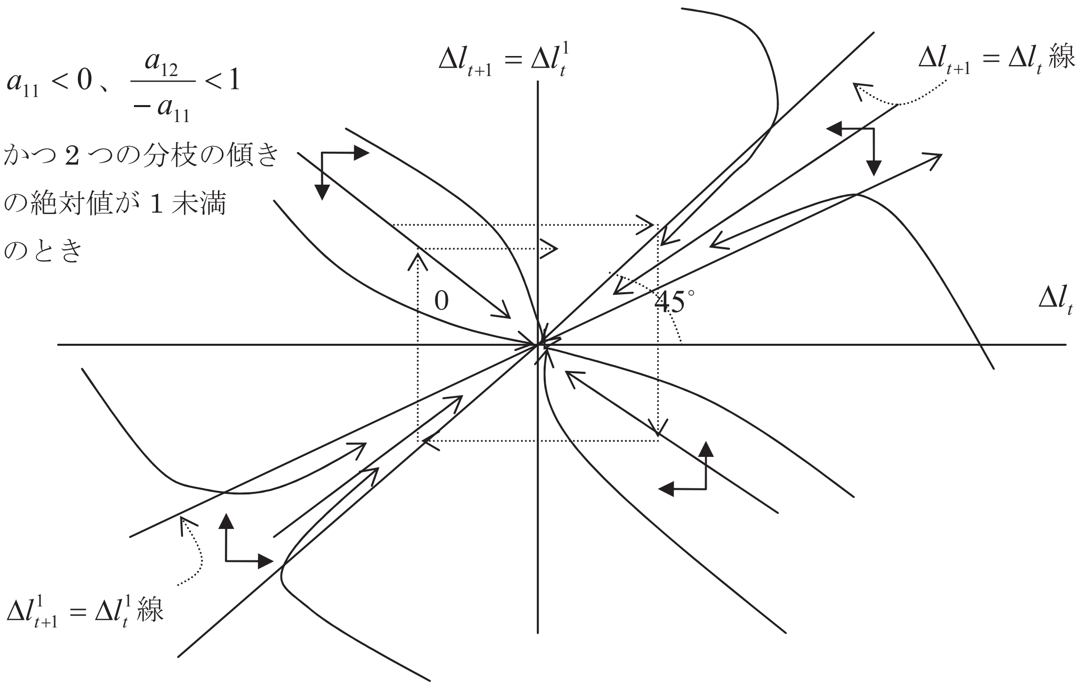


図4-2-4　結節点となるとき



(4-23),(4-25)は、k_t, b_t についての定差方程式になる。(4-16)と同じように、k_t の増加関数 l_t を

(4-26) $$l_{t+1} = k_{t+1} + \beta_3 \frac{w(k_{t+1})}{1+r(k_{t+1})}$$

とおき、この逆関数を $k_t = g(l_t)$ とおくと、これも増加関数である。前のように記法を簡略化すると、(4-23)は、

$$l_{t+1} = \beta_1(1+r(l_t))w(l_{t-1}) + \beta_2 w(l_t) - \frac{1}{n_L(1+n)} b_t$$

t を $t+1$ にすすめ、$l_t^1 = l_{t+1}$ とおき、b_{t+1} は(4-25)を代入すると、

$$l_{t+1}^1 = \beta_1(1+r(l_t^1))w(l_t) + \beta_2 w(l_t^1) - \frac{1}{n_1(1+n)} b_{t+1}$$

$$= \beta_1(1+r(l_t^1))w(l_t) + \beta_2 w(l_t^1) - \beta_4(1+r(l_t^1))b_t$$

ここで、$\beta_4 = \frac{1}{n_L(1+n)^2}$ とおいた。

よって、次のように、l_t^1, l_t, b_t に関する定差方程式を得る。

(4-27)

$$l_{t+1}^1 = \beta_1(1+r(l_t^1))w(l_t) + \beta_2 w(l_t^1) - \beta_4(1+r(l_t^1))b_t$$
$$l_{t+1} = l_t^1$$
$$b_{t+1} = \frac{1+r(l_t^1)}{1+n} b_t$$

これを差分の形に書くと、

(4-28)

$$l_{t+1}^1 - l_t^1 = \beta_1(1+r(l_t^1))w(l_t) + \beta_2 w(l_t^1) - l_t^1 - \beta_4(1+r(l_t^1))b_t$$
$$l_{t+1} - l_t = l_t^1 - l_t$$
$$b_{t+1} - b_t = \frac{r(l_t^1)-n}{1+n} b_t$$

$l_{t+1}^1 = l_t^1 = l^1$ 曲面は、同時に $l_{t+1} = l_t = l$ 曲面でもあり、

(4-29) $\beta_1(1+r(l^1))w(l) + \beta_2 w(l^1) - l^1 - \beta_4(1+r(l^1))b = 0$

かつ　$l^1 = l$

$b_{t+1} = b_t$ 曲面は、$r(l^1) = n$

(4-29)は、バブルなしの場合の(4-19)に対応する。(4-19)の場合は、その前に、(4-15)の形で、k ないし l がプラスの定常状態が 1 つか、2 つかを調べた。従って、バブルありの場合の(4-29)において、$b=0$ としたときの $l^1 = l$ は、1 つか 2 つあることになる。

l_t, l_t^1, b_t 座標における位相図は描けないが、$b=0$ 平面では、図 4-2-1~4-2-4 となるはずである。また、$l_t = l_t^1$ 平面上の位相図は、前節図 3-3,3-4 と同様になると考えられる。

以上の議論を l_t, l_t^1, b_t 座標上で図示すると、図 4-3 のようになる。

さらに代数的に厳密に見るため、定差方程式(4-28)の定常状態を 1 つとり、l^*, l^*, b^* とし、そのまわりで(4-28)をテーラー展開する。

$\Delta l_t = l_t - l^*$ などとおくと、

$$\Delta l_{t+1}^1 - \Delta l_t^1 = \beta_1\{r'(l^*)w(l^*)\Delta l_t^1 + (1+r(l^*))w'(l^*)\Delta l_t\}$$
$$+\beta_2 w'(l^*)\Delta l_t^1 - \Delta l_t^1 - \beta_4\{r'(l^*)b^*\Delta l_t^1 + (1+r(l^*))\Delta b_t\}$$

$$\Delta l_{t+1} - \Delta l_t = \Delta l_t^1 - \Delta l_t$$
$$\Delta b_{t+1} - \Delta b_t = \frac{1}{1+n} r'(l^*) b^* \Delta l_t^1$$

これを行列形式で表示すると、

(4-30) $$\begin{pmatrix} \Delta l_{t+1}^1 \\ \Delta l_{t+1} \\ \Delta b_{t+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta l_t^1 \\ \Delta l_t \\ \Delta b_t \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \Delta l_t^1 \\ \Delta l_t \\ \Delta b_t \end{pmatrix}$$

ここで行列 A の要素は、$r(l^*) = n$ に注意して、

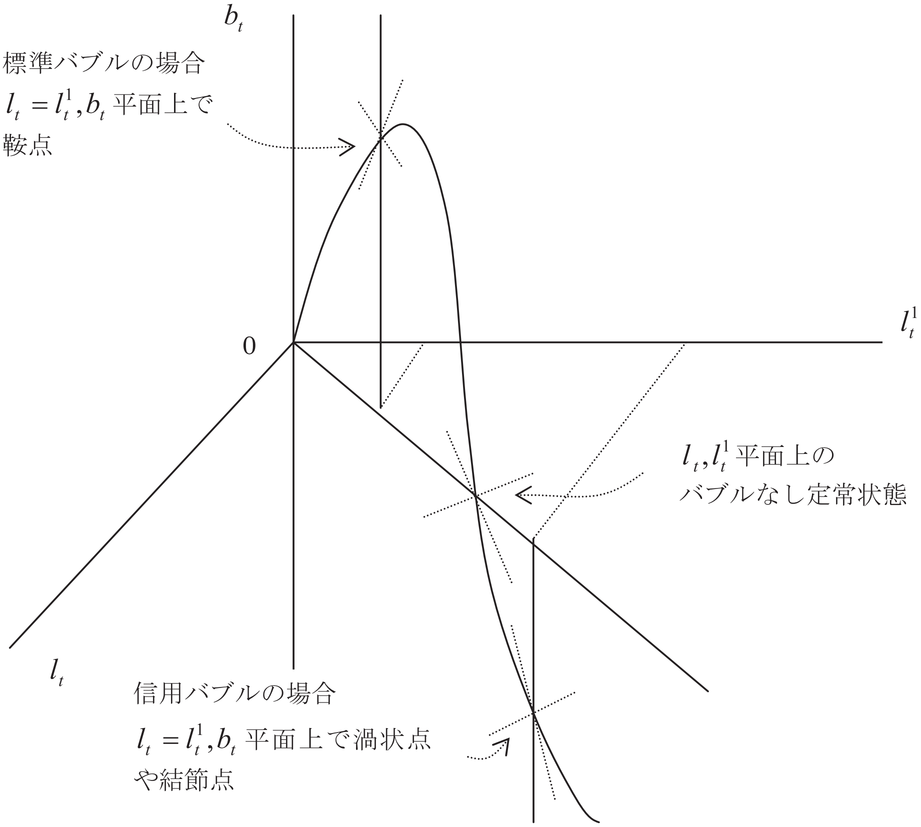
$$a_{11} = \beta_1 r'(l^*)w(l^*) + \beta_2 w'(l^*) - 1 - \beta_4 r'(l^*)b^*$$

$$a_{12} = \beta_1(1+n), a_{13} = -\beta_4(1+n)$$
$$a_{21} = 1, a_{22} = -1, a_{23} = 0$$
$$a_{31} = \frac{1}{1+n} r'(l^*)b^*, a_{32} = 0, a_{33} = 0$$

行列 A の固有方程式は、固有値を λ として、

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ a_{31} & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda^3 + (a_{11}-1)\lambda^2 + (a_{11}+a_{12}+a_{13}a_{31})\lambda + a_{13}a_{31}$$
$$= -\lambda^3$$
$$+\{\beta_1 r'(l^*)w(l^*) + \beta_2 w'(l^*) - 2 - \beta_4 r'(l^*)b^*\}\lambda^2$$
$$+\{\beta_1 r'(l^*)w(l^*) + \beta_2 w'(l^*) - 1 - 2\beta_4 r'(l^*)b^* + \beta_1(1+n)\}\lambda$$
$$-\beta_4 r'(l^*)b^* = 0$$

図4-3　3世代重複世代モデルにおけるバブルなし、バブルありの定常状態



固有値を $\lambda_i (i = 1,2,3)$、対応する固有ベクトルを $v_i (i = 1,2,3)$ とすると、定差方程式(4-30)の解は、

$$\begin{pmatrix} \Delta l_t^1 \\ \Delta l_t \\ \Delta b_t \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} c_i v_i (1+\lambda_i)^t$$ と書ける。

標準バブルで $b^* > 0$ の場合は、

$$\varphi(0) = -\beta_4 r'(l^*) b^* > 0$$
$$\varphi(-1) = -\beta_1 (1+n) < 0$$

なので、3 次曲線の形から、固有値は実根で、$\lambda_1 < -1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$ となっていることが分かる。よって、λ_2 に対応する分枝は収束する。さらに、$-2 < \lambda_1 < -1$ の場合には、これに対応する分枝も収束する。λ_3 に対応する分枝は発散する。

信用バブルで $b^* < 0$ の場合は、

$$\varphi(0) < 0, \varphi(-1) < 0$$

であり、固有方程式の λ^3 の係数がマイナスであることに注意して、3 根の積はマイナスである。

3 次曲線の形から、3 根が実根ならば、

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < -1$$
$$\lambda_1 < -1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$$

のいずれかが成り立つ。－ 2 より大きい固有値があれば、それに対応する分枝は収束する。他の分枝は発散する。

上記以外の場合には、1 つがマイナスの実根 $\lambda_1 < -1$、他の λ_2, λ_3 は共役の虚根となる。λ_1 に対応する分枝は収束または発散し、虚根に対応する分枝は定常状態のまわりを回りながら収束または発散する。

(2) T 世代重複世代モデルの分析

(a) 各世代の各時点での金融資産の集計とマクロの定常状態

3 世代重複世代モデルでは、1 人の消費者が若年期、中年期に貯蓄して得られる金融資産を、1 時点効用関数 $u(c)=\log c$ のときに求め、それらのマクロ集計量として全体の金融資産を求め、金融資産は銀行を介してすべて企業の資本保有のために貸し付けられるとして、財市場の均衡を表わす資本蓄積の方程式からマクロの 1 人当たり資本の定常状態を求めた。これは、一般の T 世代重複世代モデルに一般化出来る。
(図 4-4 参照)

時間を $t=0,1,2,...$ とし、各 $s=0,1,2,...$ につき、s 期首に生まれる人口を N_s とし、人口増加率を n とすると、$N_{s+1}=(1+n)N_s$

s 期生まれの 1 人の消費者は、若年期の s 期、$s+1$ 期、…、$s+T_1$ 期に企業で働き、労働所得を稼ぎ、消費し、貯蓄し、老年期には、$s+T_1+1$ 期に退職し、$s+T-1$ 期まで働かず、元利を含む貯蓄を取り崩して消費し、$s+T-1$ 期末に死ぬ。0 期首には、0 期生まれから $-(T-1)$ 期生まれまでの T 世代がいる。

$s=0,1,2,...$ につき、s 期生まれの 1 人の消費者は、生涯の金利 $r_{s+t},t=0,1,2,...,T-1$、賃金率 $w_{s+t},t=0,1,2,...,T_1$ を所与とし、生涯の消費 $c_{s,s+t},t=0,1,2,...,T-1$ から得られる生涯効用 U_s を、各期の予算制約のもとで、$s+t$ 期首の金融資産 $v_{s,s+t},t=1,2,...,T-1$ を調節しながら、最大化を図る。

(4-31) $$\max U_s=\sum_{t=0}^{T-1}\beta^t\log c_{s,s+t}$$

(4-32) $$c_{s,s+t}+v_{s,s+t+1}=w_{s,s+t}+(1+r_{s+t})v_{s,s+t},\quad t=0,1,2,...,T-1$$

ただし $\beta=1/(1+\theta)$、$0<\theta<1$ は時間選好率、$v_{s,s+t},t=0,1,2,...,T$ は $s+t$ 期首の金融資産で $v_{s,s}=0,v_{s,s+T}=0$、$s+t$ 期に稼ぐ賃金率 $w_{s,s+t},t=0,1,2,...,T-1$ は、

$$w_{s,s+t}=w_{s+t},t=0,1,2,...,T_1,\quad w_{s,s+t}=0,t=T_1+1,...,T-1$$ とおく。

ラグランジアンを L_s、ラグランジュ乗数を $\lambda_{s,s+t}>0,t=0,1,2,...,T-1$ とすると、
(4-33)

$$L_s=\sum_{t=0}^{T-1}\beta^t\log c_{s,s+t}+\sum_{t=0}^{T-1}\lambda_{s,s+t}\{w_{s,s+t}+(1+r_{s+t})v_{s,s+t}-c_{s,s+t}-v_{s,s+t+1}\}$$

1 階の条件は、

$$\frac{\partial L_s}{\partial c_{s,s+t}}=\frac{\beta^t}{c_{s,s+t}}-\lambda_{s,s+t}=0,t=0,1,2,...,T-1$$

$$\frac{\partial L_s}{\partial v_{s,s+t+1}}=-\lambda_{s,s+t}+\lambda_{s,s+t+1}(1+r_{s+t+1})=0,t=0,1,...,T-2$$

よって、

$$\frac{c_{s,s+t+1}}{c_{s,s+t}}=\frac{\beta\lambda_{s,s+t}}{\lambda_{s,s+t+1}}=\beta(1+r_{s+t+1}),t=0,1,...,T-2$$

ゆえに、

(4-34) $$\frac{c_{s,s+t}}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_{s+i})}=\beta^t c_{s,s},t=1,2,...,T-1$$

これがオイラー方程式である。

各時点の予算制約式(4-32)から、第 2 節(2)(a)と同様にして、生涯予算制約式が求まる。s 期生まれの 1 人の消費者にとって、$s+t$ 期の消費 1 単位は、s 期の消費

(4-35) $$\lambda_t^s=\frac{1}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_{s+i})}$$ 単位

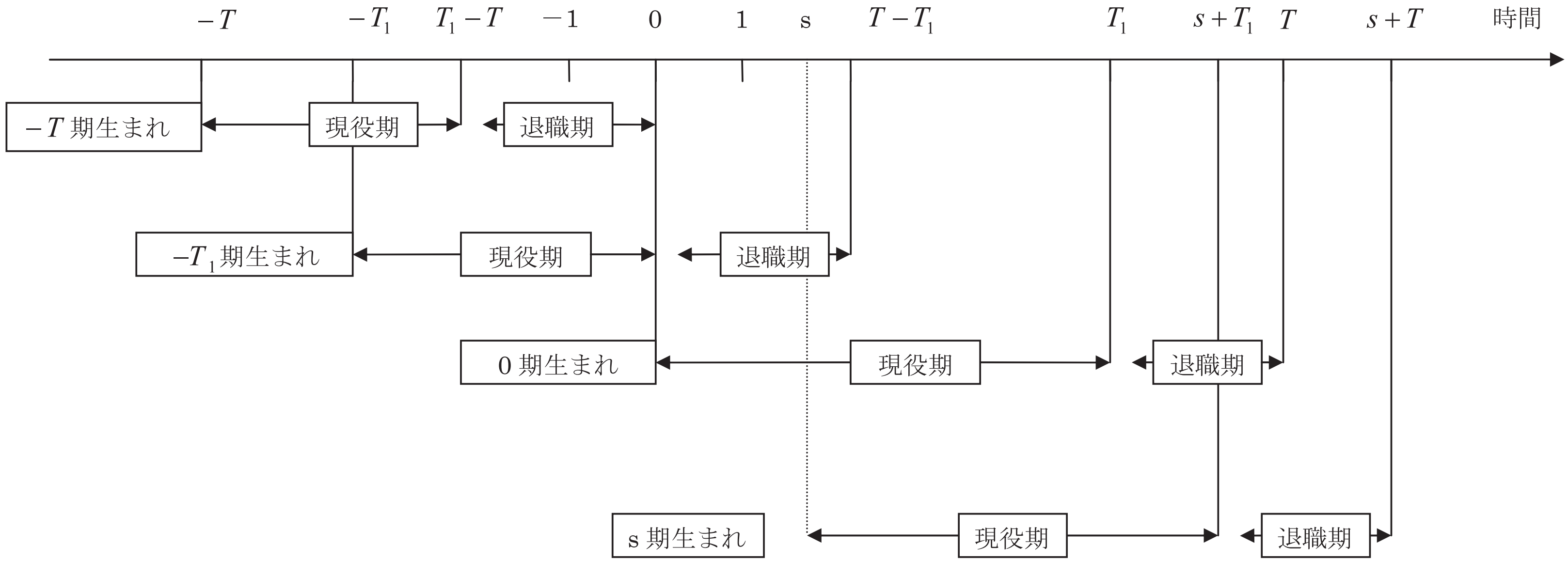
に相当する。

$\lambda_t^s=\lambda_{t+1}^s(1+r_{s+t+1}),\lambda_0^s=1$ だから、

(4-36) $$\lambda_{s,s+t}=\lambda_{s,s}\lambda_t^s$$

つまり、s 期生まれの 1 人の消費者にとって、$s+t$ 期のラグランジュ乗数は、生まれた時点のラグランジュ乗数 $\lambda_{s,s}$ だけを決めて、後は所与の金利 $\{r_t\}_{t=0,1,2,...}$ のうち、自分が生きている期

図4-4　T世代重複世代モデルの人口構成



0 歳で生まれ、すぐ働き、T_1 歳まで働き、T 歳で死ぬ			
0 歳から T_1 歳	若世代	現役期	働きながら消費、貯蓄
T_1+1 歳から T 歳	老世代	退職期	貯蓄を取り崩して消費

間の分 $\{r_t\}_{t=s,s+1,\dots,s+T-1}$ で決まる λ_t^s をかければ得られることになる。死後のラグランジュ乗数はもちろん 0 である。

(4-37)　$\lambda_{s,s+T}=0$

s 期生まれの 1 人の消費者の生涯予算制約式は、

(4-38)

$$\sum_{t=0}^{T-1}\lambda_{s,s+t}c_{s,s+t}=\sum_{t=0}^{T-1}\lambda_{s,s+t}w_{s,s+t}$$

$$=\lambda_{s,s}\sum_{t=0}^{T-1}\lambda_t^s c_{s,s+t}=\lambda_{s,s}\sum_{t=0}^{T-1}\lambda_t^s w_{s,s+t}$$

$$\therefore\sum_{t=0}^{T-1}\frac{c_{s,s+t}}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_{s+i})}=\sum_{t=0}^{T-1}\frac{w_{s,s+t}}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_{s+i})}$$

$$=\sum_{t=0}^{T_1}\frac{w_{s+t}}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_{s+i})}=h_{s,s}$$

$h_{s,s}$ は生涯労働所得であり、生涯予算制約の規模を示す。

各世代 s の 1 人の消費者は、

　生涯の金利 $r_{s+t}, t=0,1,2,\dots,T-1$、

　賃金率 $w_{s+t}, t=0,1,2,\dots,T_1$

を所与として、この生涯予算制約式のもとで、生涯効用の最大化を図る。$T, T_1\le T$ は有限なので、生涯予算制約式は有限であり、ラムゼー・モデルのような、$T\to\infty$ のときの収束の条件は不要である。つまり、金利の無限系列 $\{r_t\}_{t=0,1,2,\dots}$ について、(4-35)の λ_t^s をつくり、

$$\sum_{t=0}^{T-1}\lambda_t^s \text{ は} T\to\infty \text{のとき収束}$$

する、と要求する必要がない。横断条件、借り放題なし条件は、(4-37)で満たされている。

(4-34)を(4-38)に代入すると、

$$\sum_{t=0}^{T-1}\beta^t c_{s,s}=h_{s,s}$$

よって、

(4-39)　$$\gamma=\frac{1}{\sum_{t=0}^{T-1}\beta^t}=\frac{1-\beta}{1-\beta^T}$$

とおくと、

$$c_{s,s}=\gamma h_{s,s}$$

(4-40)　$$\frac{c_{s,s+t}}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_{s+i})}=\beta^t\gamma h_{s,s},\ t=01,\dots,T-1$$

このように、s 期生まれの 1 人の消費者の各期の消費は、現在および将来の金利と賃金率で決まる。生まれてから t 期目の消費の生まれた時点における現在価値は、生涯所得 $h_{s,s}$ に消費性向 $\beta^t\gamma$ をかけたものになる。

s 期生まれの 1 人の消費者の各期の予算制約式(4-32)から、$\tau=1,2,\dots,T-1$ について、$s+\tau$ 期の金融資産は、それ以降の生涯の消費と労働所得との差である。

$$\sum_{t=\tau}^{T-1}\frac{c_{s,s+t}-w_{s,s+t}}{\prod_{i=0}^{t-\tau}(1+r_{s+\tau+i})}=\sum_{t=\tau}^{T-1}\frac{(1+r_{s+t})v_{s,s+t}-v_{s,s+t+1}}{\prod_{i=0}^{t-\tau}(1+r_{s+\tau+i})}$$

$$=v_{s,s+\tau}+\sum_{t=\tau+1}^{T-1}\frac{v_{s,s+t}}{\prod_{i=0}^{t-\tau-1}(1+r_{s+\tau+i})}-\sum_{t=\tau}^{T-2}\frac{v_{s,s+t+1}}{\prod_{i=0}^{t-\tau}(1+r_{s+\tau+i})}$$

$$=v_{s,s+\tau}$$

よって(4-40)から、

$$v_{s,s+\tau}=\prod_{i=1}^{\tau-1}(1+r_{s+i})\sum_{t=\tau}^{T-1}\frac{c_{s,s+t}-w_{s,s+t}}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_{s+i})}$$

$$=\prod_{i=1}^{\tau-1}(1+r_{s+i})\left(\sum_{t=\tau}^{T-1}\beta^t\gamma h_{s,s}-\sum_{t=\tau}^{T-1}\frac{w_{s,s+t}}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_{s+i})}\right)$$

ここで、　$$\beta_\tau=\sum_{t=\tau}^{T-1}\beta^t\gamma=\frac{\sum_{t=\tau}^{T-1}\beta^t}{\sum_{t=0}^{T-1}\beta^t}=\frac{1-\beta^{T-\tau}}{1-\beta^T}\beta^\tau$$

とおく。β_τ は、生まれて τ 期目から死ぬまでの合計の消費性向である。すると、上の金融資産の式は、

$$v_{s,s+\tau}$$

$$=\prod_{i=1}^{\tau-1}(1+r_{s+i})\beta_\tau\sum_{t=0}^{T-1}\frac{w_{s,s+t}}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_{s+i})}$$

$$-\sum_{t=\tau}^{T-1}\frac{w_{s,s+t}}{\prod_{i=\tau}^{t}(1+r_{s+i})}$$

$$=\beta_\tau\sum_{t=0}^{\tau-1}\prod_{i=t+1}^{\tau-1}(1+r_{s+i})w_{s,s+t}$$

$$-(1-\beta_\tau)\sum_{t=\tau}^{T-1}\frac{w_{s,s+t}}{\prod_{i=\tau}^{t}(1+r_{s+i})}$$

よって、若年期　$\tau=1,.2,..,T_1$については、

(4-41)
$$v_{s,s+\tau}=\beta_\tau\sum_{t=0}^{\tau-1}\prod_{i=t+1}^{\tau-1}(1+r_{s+i})w_{s+t}-(1-\beta_\tau)\sum_{t=\tau}^{T_1}\frac{w_{s+t}}{\prod_{i=\tau}^{t}(1+r_{s+i})}$$

老年期　$\tau=T_1+1,...,T-1$については、

(4-42) $$v_{s,s+\tau}=\beta_\tau\sum_{t=0}^{T_1}\prod_{i=t+1}^{\tau-1}(1+r_{s+i})w_{s+t}$$

と、s期生まれの1人の消費者の各期の金融資産が、将来の金利と賃金率で表わされる。

若年期の金融資産は、生まれてから現在までの労働所得のうち今後死ぬまでの間に消費するために貯蓄したものと、将来の労働所得を担保にしてこれまでの消費のために借り入れたものの要返済額との差額である。

老年期の金融資産は、若年期に稼いだ労働所得のうち、今後死ぬまでの消費にあてるため貯蓄したものになる。

特に$T=3,T_1=1$のときは、前項の3世代重複世代モデルの場合に相当する。

(4-41)で$\tau=1,T_1=1$とすると、

$$v_{s,s+1}=\beta_1 w_s-(1-\beta_1)\frac{w_{s+1}}{1+r_{s+1}},\beta_1=1-\gamma$$

(4-42)で$\tau=2$とすると、

$$v_{s,s+2}=\beta_2\{(1+r_{s+1})w_s+w_{s+1}\}$$

$$=\beta_2(1+r_{s+1})(w_s+\frac{w_{s+1}}{1+r_{s+1}}),\beta_2=\beta^2\gamma$$

と、再び(4-8),(4-9)が出る。

以上から、t期における各世代の消費者1人の金融資産は次のようになる。

$t-\tau$期生まれ$(\tau=1,2,...,T_1)$の金融資産は、

(4-43)
$$v_{t-\tau,t}=\beta_\tau\sum_{j=0}^{\tau-1}\prod_{i=j+1}^{\tau-1}(1+r_{t-\tau+i})w_{t-\tau+j}-(1-\beta_\tau)\sum_{j=\tau}^{T_1}\frac{w_{t-\tau+j}}{\prod_{i=\tau}^{j}(1+r_{t-\tau+i})}$$

$t-\tau$期生まれ$(\tau=T_1+1,...,T-1)$の金融資産は、

(4-44) $$v_{t-\tau,t}=\beta_\tau\sum_{j=0}^{T_1}\prod_{i=j+1}^{\tau-1}(1+r_{t-\tau+i})w_{t-\tau+j}$$

t期における経済全体の金融資産V_tは、これら各期生まれの1人の消費者の金融資産に各期生まれ人口をかけて集計したものであり、

(4-45) $$V_t=\sum_{\tau=1}^{T_1}v_{t-\tau,t}N_{t-\tau}+\sum_{\tau=T_1+1}^{T-1}v_{t-\tau}N_{t-\tau}$$

t期における全人口をN_{0t}、労働人口をN_{Lt}とすると、

$$N_{0t}=\sum_{i=0}^{T-1}N_{t-i}=\sum_{i=0}^{T-1}\frac{1}{(1+n)^i}N_t$$

$$N_{Lt}=\sum_{i=0}^{T_1}N_{t-i}=\sum_{i=0}^{T_1}\frac{1}{(1+n)^i}N_t$$

バブルなしの場合は、t期首の金融資産は、すべて企業の資本保有K_tのための貸し付けになっているから、

(4-46) $$V_t=K_t$$

よってt期における人口1人当たり金融資産を$v_t=V_t/N_{0t}$、労働人口1人当たり資本を$k_t=K_t/N_{Lt}$、労働人口比率を$n_L=N_{Lt}/N_{0t}$とすると、

(4-47) $$v_t=n_L k_t$$

$$n_\tau=\frac{N_{t-\tau}}{N_{0t}}=\frac{1}{(1+n)^\tau}\frac{N_t}{N_{0t}}=\frac{n_0}{(1+n)^\tau},$$

$\tau=1,2,...,T-1$

とおくと、(4-41)~(4-45)から、

(4-48)

$$n_L k_t = v_t = \sum_{\tau=1}^{T_1} n_\tau v_{t-\tau,t} + \sum_{\tau=T_1+1}^{T-1} n_\tau v_{t-\tau,t}$$
$$= \sum_{\tau=1}^{T_1} n_\tau \beta_\tau \sum_{j=0}^{\tau-1} \prod_{i=j+1}^{\tau-1} (1+r_{t-\tau+i}) w_{t-\tau+j}$$
$$+ \sum_{\tau=T_1+1}^{T-1} n_\tau \beta_\tau \sum_{j=0}^{T_1} \prod_{i=j+1}^{\tau-1} (1+r_{t-\tau+i}) w_{t-\tau+j}$$
$$- \sum_{\tau=1}^{T_1} n_\tau (1-\beta_\tau) \sum_{j=\tau}^{T_1} \frac{w_{t-\tau+j}}{\prod_{i=\tau}^{j}(1+r_{t-\tau+i})}$$

ここで、生産の限界条件

$$w_t = f(k_t) - f'(k_t)k_t = w(k_t),$$
$$r_t = f'(k_t) = r(k_t)$$

から、k_tについての定差方程式を得る。

(4-49)

$$k_t = \frac{v_t}{n_L}$$
$$= \sum_{\tau=1}^{T_1} \frac{n_\tau \beta_\tau}{n_L} \sum_{j=0}^{\tau-1} \prod_{i=j+1}^{\tau-1} (1+r(k_{t-\tau+i})) w(k_{t-\tau+j})$$
$$+ \sum_{\tau=T_1+1}^{T-1} \frac{n_\tau \beta_\tau}{n_L} \sum_{j=0}^{T_1} \prod_{i=j+1}^{\tau-1} (1+r(k_{t-\tau+i})) w(k_{t-\tau+j})$$
$$- \sum_{\tau=1}^{T_1} \frac{n_\tau (1-\beta_\tau)}{n_L} \sum_{j=\tau}^{T_1} \frac{w(k_{t-\tau+j})}{\prod_{i=\tau}^{j}(1+r(k_{t-\tau+i}))}$$

　プラスの定常状態の1人当たり資本をkとし、(4-49)ですべてのk_tをkとおいて、両辺をkで割ると、

$$1 = \{\frac{f(k)}{k} - f'(k)\} \times \{\sum_{\tau=1}^{T_1} \frac{n_\tau \beta_\tau}{n_L} \sum_{j=0}^{\tau-1} (1+f'(k))^{\tau-j-1}$$
$$+ \sum_{\tau=T_1+1}^{T-1} \frac{n_\tau \beta_\tau}{n_L} \sum_{j=0}^{T_1} (1+f'(k))^{\tau-j-1} - \sum_{\tau=1}^{T_1} \frac{n_\tau (1-\beta_\tau)}{n_L} \sum_{j=\tau}^{T_1} \frac{1}{(1+f'(k))^{j-\tau+1}}\}$$

これは、3世代重複世代モデルの(4-14)と同じ形であり、そこと同様に、

(4-50) $A(k) = \dfrac{f(k)}{k} - f'(k)$

(4-51)

$$B(k) = \sum_{\tau=1}^{T_1} \frac{n_\tau \beta_\tau}{n_L} \sum_{j=0}^{\tau-1} (1+f'(k))^{\tau-j-1} + \sum_{\tau=T_1+1}^{T-1} \frac{n_\tau \beta_\tau}{n_L} \sum_{j=0}^{T_1} (1+f'(k))^{\tau-j-1}$$
$$- \sum_{\tau=1}^{T_1} \frac{n_\tau (1-\beta_\tau)}{n_L} \sum_{j=\tau}^{T_1} \frac{1}{(1+f'(k))^{j-\tau+1}}$$

とおくと、定常状態kでは、

(4-52) $A(k) = \dfrac{1}{B(k)}$

$A(k)$については、CES 生産関数の場合について、前節ですでに分析した。$B(k)$は、

$$B(0) = \infty、B'(k) < 0$$

については、前と同様である。

　$B(\infty) > 0$は、賃金率一定、ゼロ金利のとき、マクロの家計の金融資産が、貯蓄残高マイナス借り入れ残高として、ネットでプラスになることを意味する。そうなるかどうかをみる。

(4-53)

$$B(\infty) = \sum_{\tau=1}^{T_1} \frac{n_\tau \beta_\tau}{n_L} \cdot \tau + \sum_{\tau=T_1+1}^{T-1} \frac{n_\tau \beta_\tau}{n_L} (T_1 + 1)$$
$$- \sum_{\tau=1}^{T_1} \frac{n_\tau (1-\beta_\tau)}{n_L} (T_1 - \tau + 1)$$
$$= \sum_{\tau=1}^{T_1} \frac{n_\tau}{n_L} \{\beta_\tau \tau + (1-\beta_\tau)\tau\}$$
$$- (T_1 + 1)\{\sum_{\tau=1}^{T-1} \frac{n_\tau (1-\beta_\tau)}{n_L} - \sum_{\tau=T_1+1}^{T-1} \frac{n_\tau (1-\beta_\tau)}{n_L} - \sum_{\tau=T_1+1}^{T-1} \frac{n_\tau \beta_\tau}{n_L}\}$$
$$= \sum_{\tau=1}^{T_1} \frac{n_\tau}{n_L} \tau - (T_1 + 1)\{\sum_{\tau=1}^{T-1} \frac{n_\tau (1-\beta_\tau)}{n_L} - \sum_{\tau=T_1+1}^{T-1} \frac{n_\tau}{n_L}\}$$

ここで、$r = 1/(1+n)$とおくと、$n_\tau = n_0 r^\tau$

さらに、

$$\gamma_\tau = 1 - \beta_\tau = \frac{\sum_{t=0}^{\tau-1} \beta^t}{\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t} = \gamma \sum_{t=0}^{\tau-1} \beta^t$$
$$= \gamma \frac{1-\beta^\tau}{1-\beta}, \frac{1}{2} < \beta < 1$$
$$= \frac{\tau}{T}, \beta = 1$$

$\gamma = 1/\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t, \gamma_T = 1$　　とおく。

γ_τは、生まれてからτ期までの消費性向の累積であり、$\beta < 1$ならば、上に凸で1に向かい、$\beta = 1$ならば、生涯均等に消費する。

$B(\infty)=\dfrac{n_0}{n_L}\varphi(\beta,r,T,T_1)$ とおくと、

(4-54)

$$\varphi(\beta,r,T,T_1)$$
$$=\sum_{\tau=1}^{T_1} r^\tau \tau-(T_1+1)\sum_{\tau=1}^{T-1} r^\tau \gamma_\tau+(T_1+1)\sum_{\tau=T_1+1}^{T-1} r^\tau$$

$B(\infty)$ の符号をみるには、$\varphi(\beta,r,T,T_1)$ の符号をみればよい。

各人が死ぬまで働き、時間選好率がゼロならば、各人は稼いだ所得を消費に回すだけで、マクロの家計の金融資産はゼロになることが予想される。実際、これは証明される。

死ぬまで働くのでなく、老年期に備えて貯蓄する場合には、マクロの家計の金融資産がプラスになり、$B(\infty)>0$ となることが予想される。人口増加率がゼロの近傍で、かつ時間選好率がゼロの近傍の場合には、これが証明される。

(付録 7.参照)

よって、このような条件が成り立っているときは、図 4-1-1,2,3 と同様の結果を得る。CES 型生産関数で、$\rho>0$ の場合には、定常状態が複数均衡の可能性がある。

このような条件が成り立たない場合には、$B(\infty)<0$ の可能性がある。$B'(k)<0$ だから、ある $\bar{k}>0$ が存在して、$B(\bar{k})=0$ となる。これは第 3 節の図 3-1-1,3-1-2 の状況に似ている。ただし、$B(0)=\infty$、$1/B(0)=0$ だから、複数均衡にならず、プラスの定常状態は 1 つになる。

(b) Tが大きいときはラムゼー・モデルに近似

前項のやり方で T 世代重複世代モデルの定常状態の安定性の分析をするには、$T-1$ 次の定差方程式を扱う必要があり、難しい。しかし T が大きいときは、個々の消費者のオイラー方程式を直接マクロで集計して人口で割ると、マクロの 1 人当たり消費行動が、再びオイラー方程式で近似出来ることが分かる。

s 期生まれの 1 人の消費者の消費のオイラー方程式は(4-34)から、

$$c_{s,s+t+1}=\beta(1+r_{s+t+1})c_{s,s+t}$$

よって、t 期における $t-\tau$ 期生まれの 1 人の消費者の消費のオイラー方程式は、

(4-55) $$c_{t-\tau,t+1}=\beta(1+r_{t+1})c_{t-\tau,t},\quad \tau=0,1,\ldots,T-1$$

t 期における全人口の消費を集計したマクロの消費は、

(4-56) $$C_t=\sum_{\tau=0}^{T-1} c_{t-\tau,t}N_{t-\tau}$$

よって、(4-55)の右辺の和を作ると、

$$\beta(1+r_{t+1})C_t=\sum_{\tau=0}^{T-1}\beta(1+r_{t+1})c_{t-\tau,t}N_{t-\tau}$$
$$=\sum_{\tau=0}^{T-1} c_{t-\tau,t+1}N_{t-\tau}=\sum_{\tau=1}^{T} c_{t-(\tau-1),t+1}N_{t-(\tau-1)}$$
$$=\sum_{\tau=1}^{T} c_{t+1-\tau,t+1}N_{t+1-\tau}$$
$$=\sum_{\tau=0}^{T-1} c_{t+1-\tau,t+1}N_{t+1-\tau}-c_{t+1,t+1}N_{t+1}+c_{t+1-T,t+1}N_{t+1-T}$$
$$=C_{t+1}-c_{t+1,t+1}N_{t+1}$$

ここで、$t+1$ 期には $t+1-T$ 期生まれは死んでいるので、$c_{t+1-T,t+1}=0$ である。T が大きければ、$t+1$ 期に生まれたばかりの世代の消費 $c_{t+1,t+1}N_{t+1}$ は無視してよい。よって、

(4-57) $$C_{t+1}=\beta(1+r_{t+1})C_t$$

マクロの 1 人当たり消費を $c_t=\dfrac{C_t}{N_{0t}}$ とし、

両辺を全人口 N_{0t} で割ると、

$$(1+n)c_{t+1}=\beta(1+r_{t+1})c_t$$

$\beta=\dfrac{1}{1+\theta}$ とおくと、上の式は、

(4-58) $$c_{t+1}=\frac{1+r_{t+1}}{(1+\theta)(1+n)}c_t$$

これは、第 2 節のラムゼー・モデルにおいて、特に 1 時点効用関数 $u(c_t)=\log c_t$ とした時のオイラー方程式(2-30)になる。これから、θ,n,r_{t+1} が小さいときは、(2-61)と同様に、

(4-59) $$c_{t+1}-c_t=c_t(f'(k_{t+1})-\theta-n)$$

が出る。

他方、マクロの資本蓄積の方程式は、各消費者の予算制約式を集計してマクロの金融資産を求め、それが企業の資本保有のために貸し付けられるとして求めることが出来る。

t 期における $t-\tau$ 期生まれの1人の消費者の予算制約式は、(4-32)と同様に、

(4-60) $$c_{t-\tau,t} + v_{t-\tau,t+1} = w_{t-\tau,t} + (1+r_t)v_{t-\tau,t}$$
$$\tau = 0,1,...,T-1$$

マクロの労働所得を、労働人口

$$N_{Lt} = \sum_{i=0}^{T_1} N_{t-i}$$

を用いて、$W_t = w_t N_{Lt}$ と書く。

マクロの消費(4-56)と同様に、マクロの金融資産を、$v_{t,t} = 0$ に注意して、

(4-61) $$V_t = \sum_{\tau=1}^{T-1} v_{t-\tau,t} N_{t-\tau}$$

とおくと、$v_{t-T+1,t+1} = 0$ に注意して、

$$\sum_{\tau=0}^{T-1} v_{t-\tau,t+1} N_{t-\tau} = \sum_{\tau=0}^{T-2} v_{t-\tau,t+1} N_{t-\tau}$$
$$= \sum_{\tau=1}^{T-1} v_{t+1-\tau,t+1} N_{t+1-\tau} = V_{t+1}$$

となる。

よって、(4-60)の両辺に人口をかけて集計すると、マクロの家計の予算制約式を得る。

(4-62) $$C_t + V_{t+1} = W_t + (1+r_t)V_t$$

人口1人当たり金融資産を $v_t = \dfrac{V_t}{N_{0t}}$ とおき、

(4-62)の両辺を N_{0t} で割ると、

(4-63) $$c_t + (1+n)v_{t+1} = n_L w_t + (1+r_t)v_t$$

これは、ラムゼー・モデルの最初の予算制約式(2-6)を、マクロの1人当たり平均量の関係として表わすものである。

金融資産がすべて企業の資本保有のために貸し付けられているとすると、

(4-64) $$V_{t+1} = K_{t+1}$$

よって、財市場の均衡を表わす資本蓄積の方程式が出る。

(4-65) $$K_{t+1} = K_t + r_t K_t + W_t - C_t$$
$$= K_t + F(K_t, N_{Lt}) - C_t$$

労働人口1人当たり資本、労働人口比率を

$$k_t = \frac{K_t}{N_{Lt}}, n_L = \frac{N_{Lt}}{N_{0t}}$$

とおくと、1人当たり金融資産の運用(4-64)は、

(4-66) $$v_{t+1} = n_L k_{t+1}$$

(4-65)の各辺を N_{Lt} で割ると、

(4-67) $$(1+n)k_{t+1} = (1+r_t)k_t + w_t - n_L c_t$$
$$= k_t + f(k_t) - n_L c_t$$

これは第2節ラムゼー・モデルにおける資本蓄積の式(2-5)と類似している。これを差分の形に書くと、(2-59)と同様に、

(4-68) $$k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}(f(k_t) - nk_t - n_L c_t)$$

(4-59)を再掲すると、

(4-59) $$c_{t+1} - c_t = c_t(f'(k_{t+1}) - \theta - n)$$

よって、マクロの集計量の1人当たり平均の間の関係式として、ラムゼー・モデルに類似の k_t, c_t についての定差方程式が得られた。

このように、マクロの集計量の1人当たり平均は、あたかも、無限寿命の1人の消費者が、金利 $\{r_t\}_{t=0,1,2,...}$、賃金率 $\{w_t\}_{t=01,2,...}$ を所与とし、その人生の n_L 分だけ働いて、予算制約式(4-63)のもとで、生涯効用を最大化するように動く。

$$\max U = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \log c_t$$

(4-69) $$c_t + (1+n)v_{t+1} = n_L w_t + (1+r_t)v_t,$$
$$t = 0,1,2,...$$

この最大化問題のラグランジアンを L、ラクランジュ乗数を λ_t とすると、

(4-70)
$$L=\sum_{t=0}^{T}\beta^{t}\log c_t + \sum_{t=0}^{T}\lambda_t\{n_L w_t+(1+r_t)v_t-c_t-(1+n)v_{t+1}\}$$

T は有限として計算した後、$\to\infty$ とする。

(4-35),(4-36)と同様に、

(4-71) $\lambda_t=\lambda_0\lambda_t^0,\lambda_t^0=\dfrac{1}{\prod_{i=0}^{t}(1+r_i)}$

である。

(4-38)のところで述べたように、個別の家計は寿命 T で有限なので、生涯予算制約式は有限であり、死後のラグランジュ乗数はゼロ、死後の金融資産もゼロなので、横断条件、借り放題なし条件も成り立っている。従って、(4-71)の λ_t^0 について、$\sum_{t=0}^{T}\lambda_t^0$ が $T\to\infty$ で収束することを要求する必要がなかった。従って、(4-71)の λ_t について、$\sum_{t=0}^{T}\lambda_t$ が $T\to\infty$ で収束することを要求する先験的な理由がない。λ_t,v_t が横断条件、借り放題なし条件を満たすことを要求する先験的な理由もない。

従って、マクロ集計量の１人当たり平均のたどる経路は、ラムゼー・モデルの図 2-3 と同様の位相図が描け、定常状態 k^*,c^* が存在し、その近傍でテーラー展開して、安定性の分析も出来る。しかし、鞍点経路をたどるとは限らず、あらゆる可能性がある。

定常状態において、

$$f'(k^*)=r^*=\theta+n$$

定常状態における個々の消費者の消費行動は、(4-58)において、$r_{t+1}=r^*=f'(k^*)$ とおけば、

$$c_{t-\tau,t}=\left(\frac{1+r^*}{1+\theta}\right)^{\tau}c_{t-\tau,t-\tau}\approx(1+n)^{\tau}c_{t-\tau,t-\tau}$$

よって、定常状態において、マクロの消費の人口１人当たり平均は一定でも、個々の消費者の消費は生まれてから死ぬまで、人口増加率 n で伸びている。

$t=0$ の期中にバブルを入れると、ラムゼー・モデルにおける(2-73), (2-61), (2-71)と同様に、k_t,c_t,b_t に関する定差方程式を得る。

(4-72)

$$k_1-k_0=\frac{1}{1+n}(f(k_0)-nk_0-n_Lc_0-b_0)$$

$$k_{t+1}-k_t=\frac{1}{1+n}(f(k_t)-nk_t-n_Lc_t),t=1,2,...$$

$$\frac{c_{t+1}-c_t}{c_t}=f'(k_{t+1})-\theta-n,t=0,1,...$$

$$\frac{b_{t+1}-b_t}{b_t}=\frac{1}{1+n}(f'(k_{t+1})-n),t=0,1,...$$

k_0,c_0 を所与としてバブル b_0 を入れると、バブルなしの場合と比べて k_1 が動き、以下定差方程式に従って､バブルなしと異なる経路をたどる。経済全体の横断条件、借り放題なし条件が成り立つ理由がないので、$b_0\neq 0$ のときでも矛盾が起こらない。よって、標準バブル、信用バブルは起こり得る。

経済全体の横断条件、借り放題なし条件が成り立たない場合どうなるかは、すでに第 2 節(6)で分析した。それによれば、上の(4-72)の第 3 式、第 4 式から、

$$\frac{|b_t|^{1+n}}{c_t}=\frac{|b_0|^{1+n}}{c_0}e^{\theta t}\to\infty(t\to\infty)$$

となり、バブルは消費の無限大倍に膨らむ。

これは、b_0 がプラスで、標準バブルの場合は、バブル資産の価値が消費の無限大倍に膨らむことを意味し、b_0 がマイナスで、信用バブルの場合は、家計への銀行貸し付けが追い貸し、ロールオーバーにより消費の無限大倍に膨らむことを意味する。

このため、マクロの経済合理性の条件がない場合でも、家計は問題に気づき、修正が行われることになろう。しかし、その問題に気づくまではバブルは膨らみ続ける。現実に起こっている状況はこれに近い。

5. 連続時間モデルによる分析

(1) ラムゼー・モデルにおけるマクロ経済計算

第１節では、離散時間の場合のマクロ経済計算を述べたが、ここではそれを連続時間の場合に述べる。連続時間の場合は期首、期中、期末の区別がないので、分析が簡単化されるとともに、現実との対応で捨象される点があることに注意すべきである。

時間軸を$t \geq 0$とし、時点tにおける人口を$N(t)$とし、増加率nで増えるとする。

$$n = \frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt}$$

各家計は、金利$r(t)$、賃金率$w(t), t \geq 0$を所与として、労働所得を稼ぎ、消費し、貯蓄し、金融資産を蓄積し、取り崩す。時点tにおけるマクロの家計全体について集計した金融資産を$V(t)$、消費を$C(t)$とすると、家計全体の予算制約式は、

(5-1) $$C(t) + \frac{dV(t)}{dt} = w(t)N(t) + r(t)V(t), t \geq 0$$

$$V(0) = V_0 \text{(所与)}$$

時点tで、家計の金融資産$V(t)$は、すべて銀行に預金され、銀行はそれをすべて企業の資本保有$K(t)$のために貸し付けるとすると、

(5-2) $$V(t) = K(t), t \geq 0$$

$$K(0) = K_0 = V_0$$

時点tで、企業は資本$K(t)$、労働人口$N(t)$を生産に投入して、１次同次の生産関数Fにより財を$Y(t)$生産し、生産により得た所得は、レンタル所得$r(t)K(t)$、労働所得$w(t)N(t)$に分配される。生産関数は、これまでと同様に、減価償却控除後のネットの生産関数と考える。

(5-3) $$\begin{aligned} Y(t) &= F(K(t), N(t)) \\ &= r(t)K(t) + w(t)N(t), t \geq 0 \end{aligned}$$

生産の限界条件は、

$$r(t) = \frac{\partial F(K(t), N(t))}{\partial K(t)}$$

$$w(t) = \frac{\partial F(K(t), N(t))}{\partial N(t)}$$

(5-1), (5-2)から、財市場の均衡を表わす資本蓄積の式が出る。

(5-4) $$\begin{aligned} \frac{dK(t)}{dt} &= r(t)K(t) + w(t)N(t) - C(t) \\ &= F(K(t), N(t)) - C(t), t \geq 0 \end{aligned}$$

以上のマクロの集計量を人口で割って、人口１人当たり変数に変換する。ラムゼー・モデルでは、この人口１人当たり変数を、１人の代表的消費者が体現していると考える。

$$c(t) = \frac{C(t)}{N(t)}, v(t) = \frac{V(t)}{N(t)}, k(t) = \frac{K(t)}{N(t)},$$

$$y(t) = \frac{Y(t)}{N(t)}, f(k(t)) = \frac{F(K(t), N(t))}{N(t)} = F(k(t), 1)$$

(5-1)の両辺を$N(t)$で割ると、

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt}N(t) + v(t)\frac{dN(t)}{dt}$$

などに注意して、１人の代表的消費者の予算制約式は、

(5-5) $$c(t) + \frac{dv(t)}{dt} + nv(t) = w(t) + r(t)v(t), t \geq 0$$

$$v(0) = v_0 \text{(所与)}$$

１人当たりの家計の金融資産の方程式として表わすと、

(5-6) $$\frac{dv(t)}{dt} = (r(t) - n)v(t) + w(t) - c(t)$$

家計の金融資産がすべて企業の資本保有のために貸し付けられている条件は、

(5-7) $$v(t) = k(t), t \geq 0, k(0) = k_0 = v_0$$

企業の生産の条件は、

(5-8) $$y(t) = f(k(t)) = r(t)k(t) + w(t), t \geq 0$$

(5-9) $$\begin{aligned} r(t) &= f'(k(t)), \\ w(t) &= f(k(t)) - f'(k(t))k(t), t \geq 0 \end{aligned}$$

資本蓄積の方程式は、

$$\text{(5-10)}\quad \frac{dk(t)}{dt} = (r(t)-n)k(t) + w(t) - c(t) = f(k(t)) - nk(t) - c(t),\ t \geq 0$$

(2) ラムゼー・モデルにおける１人の消費者の消費・貯蓄行動の定式化

ラムゼー・モデルにおいては、１ 人の代表的消費者が時点 $t=0$ に生まれ、働き、労働所得を稼ぎ、消費し、貯蓄し、金融資産を蓄積し、取り崩し、時点 $t=T$ に死ぬとして消費・貯蓄行動を定式化し、その後 $T \to \infty$ とする。

この１人の消費者は、時点 $t=0$ における金融資産 $v(0)$、各時点 t の金利 $r(t)$、賃金率 $w(t)$ を所与として、働き、労働所得を稼ぎ、消費し、貯蓄し、金融資産を蓄積し、取り崩す。消費者は、１人当たり消費 $c(t)$ から $u(c(t))$ の効用を受け、それを時間選好率 $\theta, 0<\theta<1$ で時点 $t=0$ に割り引いて合計した、生涯効用を最大化しようとする。

$$\text{(5-11)}\quad \max U(v(0)) = \int_0^T u(c(\tau))\exp(-\theta\tau)d\tau$$

この消費者にとって、時点 t における １ 人当たりの消費 $c(t)$ の時点 $t=0$ に引き戻した価値は、第１に、金利上昇分で割り引くため、

$$\exp(-\int_0^t r(\tau)d\tau)$$

を乗ずる必要がある。第 ２ に、時点 t の人口は時点 $t=0$ の人口の

$$e^{nt} = \exp(\int_0^t n d\tau)$$

倍になっているので、これを乗ずる必要がある。両者をあわせて、時点 t における １ 人当たりの消費 $c(t)$ の時点 $t=0$ に引き戻した価値は、

$$c(t)\exp(-\int_0^t (r(\tau)-n)d\tau)$$

となっている。1 人当たり賃金 $w(t)$ についても同様なので、この消費者の生涯予算制約式は、

(5-12)

$$\int_0^T c(t)\exp(-\int_0^t (r(\tau)-n)d\tau)dt = \int_0^T w(t)\exp(-\int_0^t r(\tau)-n)d\tau)dt + v(0)$$

となる。

この消費者が時点 $t=0$ に生まれてから時点 $t=T$ に死ぬまでの全生涯の効用を、生涯予算制約式のもとで最大化しているならば、その任意の途中時点 $t=s$ においても、時点 s の金融資産 $v(s)$ を所与として、時点 s 以降の生涯予算制約式のもとで、時点 s 以降の生涯効用を最大化しているはずである。

$$\text{(5-13)}\quad \max U(v(s)) = \int_s^T u(c(\tau))\exp(-\theta\tau)d\tau$$

(5-14)

$$\int_s^T c(t)\exp(-\int_s^t (r(\tau)-n)d\tau)dt = \int_s^T w(t)\exp(-\int_s^t (r(\tau)-n)d\tau)dt + v(s)$$

これは、ベルマンの原理と同じことである。

この積分制約下の積分最大化は、変分法で等周問題と呼ばれるものであり、関数空間で考えると、ラグランジュ乗数法と同じやり方で解くことが出来る。（付録 10、12 参照）

それによれば、(5-13)の積分 $U(v(s))$ を、関数空間において $c(t)$ の汎関数と考えて微分（フレッシェ微分）すると、ラグランジュ乗数 $\lambda(s)$ が存在して、$h(t)$ を任意の可積分関数として、

(5-15)

$$\begin{aligned} D_c U(v(s))h &= \int_s^T u'(c(t))\exp(-\theta t)h(t)dt \\ &= \lambda(s) D_c\{\int_s^T (c(t)-w(t))\exp(-\int_s^t (r(\tau)-n)d\tau)dt - v(s)\} \\ &= \lambda(s)\int_s^T \exp(-\int_s^t (r(\tau)-n)d\tau)h(t)dt \end{aligned}$$

となる。$h(t)$ は任意だから、積分記号をはずしたもの同士が等しく、$s \leq t \leq T$ について、

(5-16)

$$u'(c(t))\exp(-\theta t) = \lambda(s)\exp(-\int_s^t (r(\tau)-n)d\tau)$$

が成り立つ。

これは、積分形式のラグランジアンを

(5-17)

$$L(s)=U(v(s))$$
$$-\lambda(s)\{\int_s^T(c(t)-w(t))\exp(-\int_s^t(r(\tau)-n)d\tau)dt-v(s)\}$$

積分の内側のラグランジアンを

(5-18)

$$l(s)=u(c(t))\exp(-\theta t)$$
$$-\lambda(s)(c(t)-w(t))\exp(-\int_s^t(r(\tau)-n)d\tau)$$

とおいて、

(5-19) $D_c L(s)=0$

(5-20) $\dfrac{\partial l(s)}{\partial c(t)}=0$

とすればよいことを示す。

(5-16)で特に $t=s$ のとき、

(5-21) $u'(c(s))\exp(-\theta s)=\lambda(s)$

$t\geq s$ を任意に固定し、時点 t 以降の生涯効用を最大化しても同じ結果が出るから、

(5-22) $u'(c(t))\exp(-\theta t)=\lambda(t)$

これを(5-16)に代入して、

(5-23) $\lambda(t)=\lambda(s)\exp(-\int_s^t(r(\tau)-n)d\tau)$

特に $s=0$ のときは、

(5-24) $\lambda(t)=\lambda(0)\exp(-\int_0^t(r(\tau)-n)d\tau)$

となる。(5-22)、(5-24)により $\lambda(t)$ は、(5-12)で直感的に求めたように、時点 t における消費 1 単位の時点 $t=0$ に引き戻した価値を表わす。

(5-23)を t で微分すれば、

(5-25) $\dfrac{d\lambda(t)}{dt}=-(r(t)-n)\lambda(t)$

時点 s 以降の生涯予算制約式(5-14)は、t で微分すると、微分形式の予算制約式(5-6)そのものになっているから、再掲すると、

(5-6) $\dfrac{dv(t)}{dt}=(r(t)-n)v(t)+w(t)-c(t)$

ハミルトニアンを

(5-26)

$$H(c(t),v(t),\lambda(t),t)=u(c(t))\exp(-\theta t)$$
$$+\lambda(t)\{(r(t)-n)v(t)+w(t)-c(t)\}$$

とおくと、(5-22)、(5-25)、(5-6)から、ポントリャーギンの最大値原理の式が出る。

(5-27)
$$\frac{\partial H}{\partial c(t)}=0$$
$$\frac{d\lambda(t)}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial v(t)}$$
$$\frac{dv(t)}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \lambda(t)}$$

時点 t 以降の生涯効用 $U(v(t))$ が金融資産 $v(t)$ を所与として最大化されているとき、この所与の金融資産 $v(t)$ が動いたときに生涯効用 $U(v(t))$ がどう動くかは、(5-17)を

(5-28)

$$L(t)=U(v(t))$$
$$-\lambda(t)\{\int_t^T(c(s)-w(s))\exp(-\int_t^s(r(\tau)-n)d\tau)ds-v(t)\}$$

と書いて、関数空間での微分についての包絡線定理により、

(5-29) $D_{v(t)}U(v(t))=D_{v(t)}L(t)=\lambda(t)$

これから、

$$\frac{\partial}{\partial t}D_{v(t)}U(v(t))=D_{v(t)}\frac{\partial U(v(t))}{\partial t}$$
$$=\frac{d\lambda(t)}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial v(t)}$$

となるから、$v(t)$ による偏微分の中が等しいとおけば、$U(v(t))$ が最大化されているとき、次のように、ハミルトン・ヤコビ・ベルマンの方程式が成り立つ。

(5-30) $\dfrac{\partial U(v(t))}{\partial t}=-H$

同じく、時点 t 以降の生涯効用 $U(v(t))$ が最大化されているとき、将来の特定時点 $s_0>t$ における賃金率 $w(s_0)$、金利 $r(s_0)$ が動くと $U(v(t))$ がどう動くかは、パラメータ $w(s)$、$r(s)$ にインパルス $\delta w(s_0)$、$\delta r(s_0)$ が入った

ときの変化$\delta_w U(v(t))$、$\delta_r(v(t))$を求めればよい。(5-28)に包絡線定理を適用し、

(5-31)

$$\delta_w U(v(t)) = \delta_w L(t)$$
$$= \lambda(t)\exp(-\int_t^{s_0}(r(\tau)-n)d\tau)\delta w(s_0)$$
$$= \lambda(s_0)\delta w(s_0)$$

(5-32)

$$\delta_r U(v(t)) = \delta_r L(t)$$
$$= \lambda(t)\int_{s_0}^T (c(s)-w(s))\delta r(s_0)\exp(-\int_t^s (r(\tau)-n)d\tau)ds$$
$$= \lambda(t)\exp(-\int_t^{s_0}(r(\tau)-n)d\tau)v(s_0)\delta r(s_0)$$
$$= \lambda(s_0)v(s_0)\delta r(s_0)$$

よって、

(5-33-1) $\lambda(s_0) = \dfrac{\delta_w U(v(t))}{\delta w(s_0)}$

(5-33-2) $v(s_0) = \dfrac{\dfrac{\delta_r U(v(t))}{\delta r(s_0)}}{\dfrac{\delta_w U(v(t))}{\delta w(s_0)}} = -\left.\dfrac{\delta w(s_0)}{\delta r(s_0)}\right|_{U\max}$

　このように、時点tにおける将来時点s_0のラグランジュ乗数$\lambda(s_0)$は、その将来時点において賃金率$w(s_0)$が高まったとき、生涯効用$U(v(t))$がどれ位高まるかを表わす。

　また、時点tにおける金融資産$v(t)$は、将来時点s_0において賃金率$w(s_0)$が下がったとき、金利$r(s_0)$が高まって金融資産の価値が高まり、もとの生涯効用水準$U(v(t))$を維持出来るように持つのが最適ということになる。

　ラムゼー・モデルでは、消費者は寿命Tが無限だと考えるので、生涯予算制約式(5-12)の両辺の積分は$T\to\infty$で収束しなければならない。

　まず、金利$r(t)$、賃金率$w(t)$、$0\le t\le T$を所与としているが、$T\to\infty$のとき、賃金率が有界$w(t)\le\overline{w}$のときに、生涯労働所得が収束するためには、

(5-34)

$$\int_0^T \exp(-\int_0^t (r(\tau)-n)d\tau)dt = \frac{1}{\lambda(0)}\int_0^T \lambda(\tau)d\tau$$

はT$\to\infty$で収束

しなければならない。このためには(付録 13)

(5-35)　$\lim_{t\to\infty}\lambda(t)=0$

が必要である。これは、横断条件である。

(5-33-1)でtのところに0を入れ、s_0のところにtを入れると、

(5-36)　$\lambda(t) = \dfrac{\delta_w U(v(0))}{\delta w(t)}$

であるから、横断条件は、遠い将来の賃金率変化が生涯効用に及ぼす影響は、ゼロに近づくことを意味する。

　さらに、時点s以降の積分

$$\int_s^T c(t)\exp(-\int_0^t (r(\tau)-n)d\tau)dt,$$
$$\int_s^T w(t)\exp(-\int_0^t r(\tau)-n)d\tau)dt$$

は、$T\to\infty$、$s\to\infty$のとき、ゼロに収束しなければならない。(5-14)よりこの 2 つの積分は、

$$\int_s^T c(t)\exp(-\int_0^t (r(\tau)-n)d\tau)dt$$
$$= \int_s^T w(t)\exp(-\int_0^t (r(\tau)-n)d\tau)dt + v(s)\exp(-\int_0^s (r(\tau)-n)d\tau)$$

となっている。$T\to\infty$、$s\to\infty$のとき、右辺第 2 項もゼロに収束しなければならないが、(5-24)から、それは

(5-37)　$\lim_{t\to\infty}\lambda(t)v(t)=0$

を意味する。これは、借り放題なし条件である。

(5-32)でtのところに0を入れ、s_0のところにtを入れると、

(5-38)　$\lambda(t)v(t) = \dfrac{\delta_r U(v(0))}{\delta r(t)}$

であるから、借り放題なし条件は、遠い将来の金利変化が生涯効用に及ぼす影響は、ゼロに近づくことを意味する。

(3) ラムゼー・モデルで時間選好率の異なる複数の消費者を考える場合

ラムゼー・モデルでは、1 人の代表的消費者だけを考えるが、ここではより一般的に複数の消費者を考える。これらの消費者は、瞬間的な効用関数 $u(c(t))$ は同じだが、時間選好率が異なるとする。それを

$$1 > \theta_1 > \theta_2 > ... > \theta_M > 0$$

とし、それぞれに該当する人口を $N_i(t)$、全人口に占める割合を n_i とする。またそれぞれの時間選好グループの消費の合計、金融資産の合計を $C_i(t), V_i(t)$ とする。すると、

$$n_i = \frac{N_i(t)}{N(t)}, \sum_{i=1}^{M} N_i(t) = N(t),$$

$$\sum_{i=1}^{M} C_i(t) = C(t), \sum_{i=1}^{M} V_i(t) = V(t)$$

それぞれの時間選好グループの 1 人の消費者の消費、金融資産は、$i = 1,2,...,M$ について、

$$c_i(t) = \frac{C_i(t)}{N_i(t)}, v_i(t) = \frac{V_i(t)}{N_i(t)}$$

$$c(t) = \sum_{i=1}^{M} n_i c_i(t), v(t) = \sum_{i=1}^{M} n_i v_i(t), \sum_{i=1}^{M} n_i = 1$$

それぞれの時間選好グループについて、予算制約式

(5-39) $$C_i(t) + \frac{dV_i(t)}{dt} = w(t)N_i(t) + r(t)V_i(t), \quad t \geq 0, i = 1,2,...,M$$

が成り立つので、1 人当たりの予算制約式が成り立つ。

(5-40) $$c_i(t) + \frac{dv_i(t)}{dt} + nv_i(t) = w(t) + r(t)v_i(t), \quad t \geq 0, i = 1,2,...,M$$

それぞれの時間選好グループの 1 人の消費者は、金利 $r(t)$、賃金率 $w(t), t \geq 0$ を所与として、予算制約のもとで、生涯効用関数を最大化するように、消費 $c_i(t)$、金融資産 $v_i(t)$ を選ぶ。

(5-41) $$\max \int_0^T u(c_i(t)) \exp(-\theta_i t) dt$$

(5-42) $$\frac{dv_i(t)}{dt} = (r(t) - n)v_i(t) + w(t) - c_i(t), \quad t \geq 0, i = 1,2,..., M$$

ポントリャーギンの最大値原理により、ハミルトニアン、共役変数を $H_i, \lambda_i(t)$ とすると、

(5-43) $$H_i = u(c_i(t)) \exp(-\theta_i t) + \lambda_i(t)\{(r(t) - n)v_i(t) + w(t) - c_i(t)\}$$

1 階の条件は、

(5-44) $$\frac{d\lambda_i(t)}{dt} = -\frac{\partial H_i}{\partial v_i(t)} = -\lambda_i(t)(r(t) - n)$$

さらに、

(5-45) $$\frac{\partial H_i}{\partial c_i(t)} = 0 \therefore u'(c_i(t)) \exp(-\theta_i t) = \lambda_i(t)$$

寿命 $T \to \infty$ とするので、横断条件は、

(5-46) $$\lim_{T \to \infty} \lambda_i(T) = 0$$

借り放題なし条件は、

(5-47) $$\lim_{T \to \infty} v_i(T)\lambda_i(T) = 0$$

(5-44)を解くと、

(5-48) $$\lambda_i(t) = \lambda_i(0) \exp(-\int_0^t (r(\tau) - n)d\tau)$$

だから、

(5-49) $$\lambda^0(t) = \exp(-\int_0^t (r(\tau) - n)d\tau)$$

とおくと、

(5-50) $$\lambda_i(t) = \lambda_i(0)\lambda^0(t)$$

であり、横断条件(5-46)は、

(5-51) $$\lim_{t \to \infty} \lambda^0(t) = 0$$

となり、時間選好グループ i に依存せず、金利と人口増加率だけで決まることが分かる。

(5-44)、(5-45)から、

$$u''(c_i(t)) \frac{dc_i(t)}{dt} \exp(-\theta_i t) - \theta_i u'(c_i(t)) \exp(-\theta_i t) = -u'(c_i(t)) \exp(-\theta_i t)(r(t) - n)$$

よって、

(5-52) $$\frac{u''(c_i(t))}{u'(c_i(t))}\frac{dc_i(t)}{dt}=\theta_i+n-r(t)$$

ここで(2-60)と同様に、相対リスク回避度を

(5-53) $$\frac{1}{\sigma_i}=-\frac{u''(c_i(t))c_i(t)}{u'(c_i(t))}$$

と定義し、これが一定の場合を考える。すると(5-52)は、

(5-54) $$\frac{d(\log c_i(t))}{dt}=\sigma_i(r(t)-\theta_i-n)$$

以上から、時間選好率の異なる複数の消費者のいる経済で、バブルなしの場合には、次のように、$k(t), c_i(t), i=1,2,...,M$ に関する連立微分方程式が成り立つ。(5-10)、(5-54)より、

(5-55)
$$\frac{dk(t)}{dt}=f(k(t))-nk(t)-c(t)$$
$$c(t)=\sum_{i=1}^{M}n_i c_i(t)$$
$$\frac{d(\log c_i(t))}{dt}=\sigma_i(f'(k(t))-\theta_i-n)$$
$$i=1,2,...,M$$

θ_i が異なるので、第 3 式の右辺を同時にゼロにするような $k(t)$ はないので、定常状態は一般には存在しないことになる。

(a) 異なる時間選好率の分布の標準偏差が小さく、単峰型の場合

(5-55)第 3 式の両辺を、時間選好グループの人口ウェイト n_i で加重平均すると、

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{M}n_i\log c_i(t)=(\sum_{i=1}^{M}n_i\sigma_i)(r(t)-n)-\sum_{i=1}^{M}n_i\sigma_i\theta_i$$

ここで、 $\sigma=\sum_{i=1}^{M}n_i\sigma_i, \sigma\theta=\sum_{i=1}^{M}n_i\sigma_i\theta_i$

とおくと、

(5-56) $$\frac{d}{dt}\log(\prod_{i=1}^{M}(c_i(t))^{n_i})=\sigma(r(t)-\theta-n)$$

もし異なる時間選好率の分布の標準偏差が小さく、単峰型の場合には、

$$\log\frac{c_i(t)}{c(t)}=\log(1+\frac{c_i(t)-c(t)}{c(t)})\approx\frac{c_i(t)-c(t)}{c(t)}$$

よって、両辺の加重平均をとると、

$$\log(\prod_{i=1}^{M}(\frac{c_i(t)}{c(t)})^{n_i})\approx\sum_{i=1}^{M}n_i\frac{c_i(t)-c(t)}{c(t)}=0$$

ゆえに、幾何平均は算術平均で近似出来る。

$$\prod_{i=1}^{M}(c_i(t))^{n_i}\approx c(t)$$

このとき、(5-55)第 3 式は、

(5-57) $$\frac{d}{dt}\log c(t)=\sigma(r(t)-\theta-n)$$

となる。

一方、代表的消費者の予算制約式は、(5-40)を算術平均したものが成り立つ。

よって、代表的消費者 1 人の消費・貯蓄行動は、相対的リスク回避度$1/\sigma$、時間選好率θで、最大値問題

(5-58) $$\max U^S=\int_0^T u(c(t))\exp(-\theta t)dt$$

$$\frac{dv(t)}{dt}=(r(t)-n)v(t)+w(t)-c(t)$$

を解いた場合と同じになる。よって、(5-55)は、ラムゼー・モデルと同じになる。

(5-58)のハミルトニアン、共役変数を H^S、$\lambda^S(t)$ とすると、

$$H^S=u(c(t))\exp(-\theta t)$$
$$+\lambda^S(t)\{(r(t)-n)v(t)+w(t)-c(t)\}$$

1 階の条件は、

$$\frac{d\lambda^S(t)}{dt}=-\frac{\partial H^S}{\partial v(t)}=-\lambda^S(t)(r(t)-n)$$

よって、(5-49)を使って、

$$\lambda^S(t)=\lambda^S(0)\lambda^0(t)$$

ゆえに、(5-51)から、代表的消費者についても、横断条件が成り立つ。

(5-59) $\lim_{t\to\infty}\lambda^S(t)=0$

代表的消費者の金融資産 $v(t)$ は、ここの時

間選好グループの金融資産の算術平均であり、共役変数 $\lambda^S(t)$ は各グループ共通だから、借り放題なし条件(5-47)も算術平均で成り立つ。

(5-60) $\lim_{t\to\infty}\lambda^S(t)v(t)=0$

よって、マクロの集計量である代表的消費者に対して、定常状態が存在し、位相図は離散時間の場合の図 2-3 と同じものが描ける。

（b）時間選好率の分布が双峰型の場合

時間選好率が高く、先楽後憂の第 1 の消費者グループと、時間選好率が低く、先憂後楽の第 2 の消費者グループがある場合を考える。上で $M=2,\theta_1>\theta_2>0$ であり、簡単のため、人口は両者等しいとする。すると、(5-55)は、

(5-61)
$$\frac{dk(t)}{dt}=f(k(t))-nk(t)-c(t)$$
$$c(t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}c_i(t)$$
$$\frac{d(\log c_i(t))}{dt}=\sigma_i(f'(k(t))-\theta_i-n)$$
$$i=1,2$$

$f'(k_i^*)=\theta_i+n,i=1,2$ とすると、$\theta_1>\theta_2$ だから、$k_1^*<k_2^*$ であり、$k(t)<k_1^*$ のときは、いずれの消費者グループにおいても、1 人当たり消費は増えるから、経済全体でも 1 人当たり消費は増える。$k(t)>k_2^*$ のときは、いずれの消費者グループにおいても 1 人当たり消費は減るから、経済全体でも 1 人当たり消費は減る。

これに対して、$k_1^*<k(t)<k_2^*$ のときは、第 1 のグループの 1 人当たり消費は減り、第 2 のグループの 1 人当たり消費は増えるので、経済全体の 1 人当たり消費は、増えることも減ることもあり得る。

このように経済の動きが複雑になるのは、$k_1^*<k(t)<k_2^*$ のときである。そのようすを簡単にみるため、時間　$t=0$ ですでに 1 人当たり資本が $k_1^*<k_0<k_2^*$ となっており、その近傍で、生産関数は、

$$f(k(t))=rk(t)+a$$

ここで r,a は定数で、$\theta_1+n>r>\theta_2+n$ となっているとする。

(厳密には、区間　$[k_1^*,k_2^*]$ を部分区間に区分して、$f(k(t))$ をそれぞれの部分区間で折れ線で近似した場合に、1 部分区間を考えるのと同じである。)

すると、(5-61)は、

(5-62)
$$\frac{dk(t)}{dt}=(r-n)k(t)-c(t)+a$$
$$c(t)=\frac{1}{2}(c_1(t)+c_2(t))$$
$$\frac{d(\log c_i(t))}{dt}=\sigma_i(r-\theta_i-n),i=1,2$$

よって、$c_i(t)=c_i(0)\exp(\sigma_i(r-\theta_i-n)t)$

$c_i(0)=2\alpha_i,i=1,2$ とおいて、

$$c(t)=\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\exp(\sigma_i(r-\theta_i-n)t)$$

よって、

$$\frac{dk(t)}{dt}=(r-n)k(t)-\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\exp(\sigma_i(r-\theta_i-n)t)+a$$

この解は、未定乗数法により、

$$k(t)=\sum_{i=1}^{2}\frac{\alpha_i}{(r-n)-\sigma_i(r-\theta_i-n)}\exp(\sigma_i(r-\theta_i-n)t)$$
$$-\frac{a}{r-n}+\alpha_3$$

ここで、α_3 は、$t=0$ のとき、$k(0)=k_0$ となるようにとる。

よって、

$$\frac{dk(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{2}\frac{\alpha_i\sigma_i(r-\theta_i-n)}{(r-n)-\sigma_i(r-\theta_i-n)}\exp(\sigma_i(r-\theta_i-n)t)$$

$$\frac{dc(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\sigma_i(r-\theta_i-n)\exp(\sigma_i(r-\theta_i-n)t)$$

$\theta_1+n>r>\theta_2+n$ だから、$c_1(t)$ は時間とともに減り、$c_2(t)$ は増える。両者の平均として、$c(t)$ は時間とともに減ってから増えるか、増え続けるかである。

$dk(t)/dt$ の第 1 項の係数はマイナスであり、第 2 項の係数は、プラス、マイナスがあり得る。

以上を位相図でみると図 5-1 のようになる。

先楽後憂の第 1 消費者グループにとって、鞍点は１人当たり資本がk_1^*と低く、先憂後楽の第２消費者グループにとって、鞍点は１人当たり資本がk_2^*と高いところにある。両方のグループが、$t=0$において、１人当たり資本k_0を所与として、それぞれの鞍点経路に相当する 1 人当たり消費$c_i(0), i=1,2$から出発する場合を考える。

$k(t)<k_1^*$の範囲では、経済全体の１人当たり資本と消費は、

$$k_0、\ c(0)=(c_1(0)+c_2(0))/2$$

から出発し、図 5-1 の①のように、２つの鞍点経路の間を通ると考えられる。

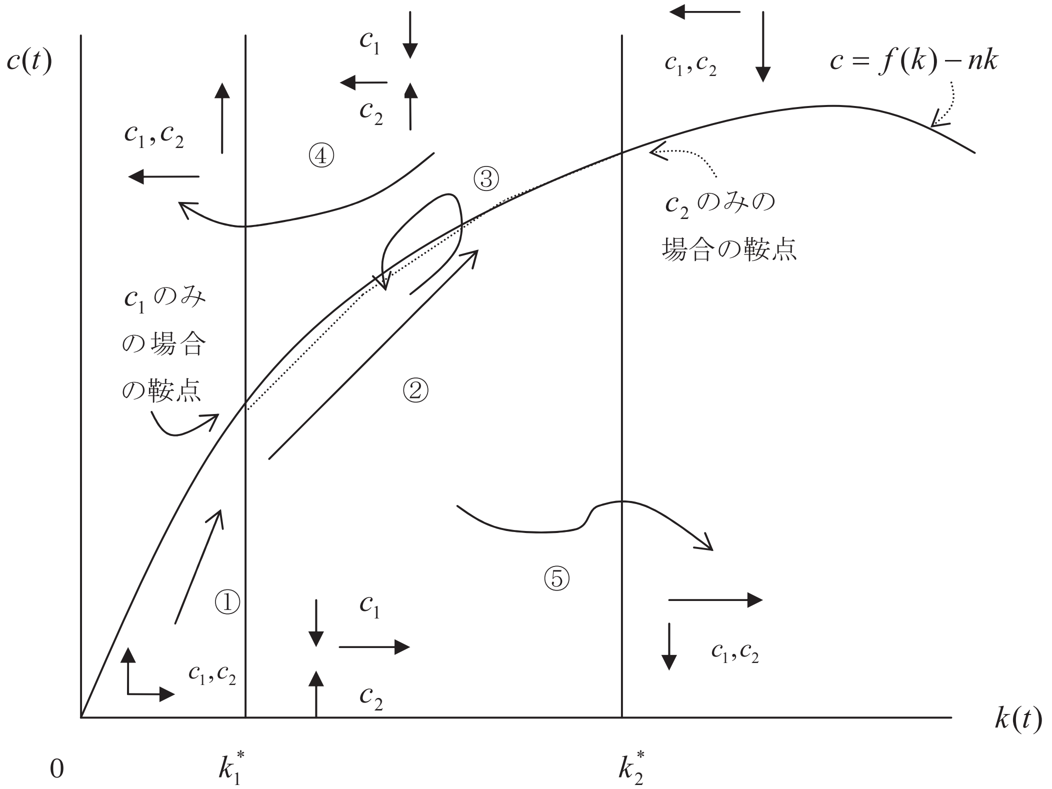
$k_1^*<k(t)<k_2^*$の範囲では、$dk(t)/dt$がプラスで、供給力の内側でプラスの資本蓄積が出来るならば、②のように、１人当たり資本、１人当たり消費が増える。

しかし、それが供給力の天井にぶつかり、$dk(t)/dt$がマイナスになると、③のように、資本を取り崩して消費に回し、次いで消費も減ることがあり得る。この場合は、循環が生ずる可能性がある。

④は消費が供給を上回り続ける場合で、資本を取り崩して消費に回し続ける。⑤は、消費を減らして資本蓄積に回し続ける場合である。

これらの動きは、平均を表わす代表的消費者がいない場合の、マクロの集計量の動きであり、擬人的な経済合理性を持った動きではない。このため、境界条件、借り放題なし条件は必ずしも成り立たない。よって、これらの経路のどれもがあり得ることになる。

図5-1　ラムゼー・モデルで、時間選好率の異なる複数の消費者がいる場合の動き



(4) 動学的に非効率な成長となる条件

離散時間の場合に第 2 節(5)でやった問題は、連続時間の場合にも同様に考えられる。

ラムゼー・モデルで、1 人の代表的消費者が $0 \le t \le T$（T は後で ∞ の極限をとる）の間に、瞬間的な効用関数を $u(c(t)) = \log c(t)$ として、各時点 s で次の最大化問題を解くとする。

$$\max \int_s^T \log(c(t)) \exp(-\theta t) dt$$

$$\frac{dk(t)}{dt} = f(k(t)) - nk(t) - c(t), k(0) = k_0$$

ポントリャーギンの最大値原理により、ハミルトニアン、共役変数を $H, \lambda(t)$ とおくと、前項(5-54)で $\sigma = 1$ とした場合と同様に、次の 1 階の条件を得る。

$$\frac{d(\log c(t))}{dt} = f'(k(t)) - \theta - n$$

よって、$t \ge s$ について、(5-48)も使って、

$$c(t) = c(s) \exp(\int_s^t (f'(k(\tau)) - \theta - n) d\tau$$

$$c(s) \exp(\int_s^t f'(k(\tau) - n) d\tau) = c(s)\lambda(s) / \lambda(t)$$
$$= c(t) \exp(\theta(t-s))$$

鞍点経路の上で、この各辺を $s \le t \le T$ の間で t につき積分すると、$c(t) \ge c(s)$ に注意して、

$$c(s)\lambda(s)\int_s^T \frac{dt}{\lambda(t)} = c(s)\int_s^T \exp(\int_s^t f'(k(\tau) - n) d\tau) dt$$

$$= \int_s^T c(t) \exp((\theta(t-s)) dt$$

$$\ge c(s) \int_s^T \exp((\theta(t-s)) dt$$

$$= c(s) \frac{1}{\theta} \{\exp((\theta(T-s)) - 1\} \to \infty (T \to \infty)$$

(5-63)

$$\therefore \int_s^\infty \frac{dt}{\lambda(t)} = \int_s^\infty \exp(\int_s^t f'(k(\tau) - n) d\tau) dt = \infty$$

これは経済がパレート最適な資本蓄積経路をたどっていることを示すキャス、バラスコ、シェルの条件である。これは、横断条件(5-35)からも出る。この対偶として、

(5-64)

$$\int_s^\infty \frac{dt}{\lambda(t)} = \int_s^\infty \exp(\int_s^t f'(k(\tau) - n) d\tau) dt < \infty$$

ならば、資本蓄積が過剰で、$f'(k(\tau)) - n$ が小さ過ぎ、資本を減らせば消費が増える、動学的に非効率な成長となっている。

(5) ラムゼー・モデルでも、横断条件が成り立たなければ、バブルがある

離散時間の場合は、第 2 節(6)でやったが、連続時間の場合は、ラムゼー・モデルに単純に貨幣を導入すると矛盾が生ずる、という議論と同じやり方で出来る。

代表的消費者は、次の最大化問題を解く。

$$\max \int_0^T u(c(t)) \exp(-\theta t) dt \qquad (T \to \infty)$$

(5-65) $$\frac{dv(t)}{dt} = (r(t) - n)v(t) + w(t) - c(t)$$

最大化問題のハミルトニアン、共役変数を $H, \lambda(t) > 0$ とすると、

$$H = u(c(t)) \exp(-\theta t)$$
$$+ \lambda(t)\{(r(t) - n)v(t) + w(t) - c(t)\}$$

1 階の条件は、

(5-66) $$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial v(t)} = -\lambda(t)(r(t) - n)$$

(5-67) $$\frac{\partial H}{\partial c(t)} = 0 \therefore u'(c(t)) \exp(-\theta t) = \lambda(t)$$

よって、

(5-68) $$\frac{d(\log c(t))}{dt} = \sigma(r(t) - \theta - n)$$

ここで、前と同様に、

(5-69) $$\frac{1}{\sigma} = -\frac{u''(c(t))c(t)}{u'(c(t))}$$

とし、以下、σ 一定の場合を考える。

横断条件、借り放題なし条件は、

(5-70) $$\lim_{T\to\infty} \lambda(T) = 0$$

(5-71) $$\lim_{T\to\infty} v(T)\lambda(T) = 0$$

標準バブルの場合は、1 人当たり金融資産 $v(t)$ は、企業の 1 人当たり資本保有 $k(t)$ のための貸し付けと、1 人当たりバブル $b(t)$ の購入に当てられる。

信用バブルの場合は、1 人当たり金融資産 $v(t)$、および 1 人当たりバブル $b(t)$ の借り入れにより、企業の 1 人当たり資本保有 $k(t)$ のための貸し付けが行われる。標準バブルを $b(t) > 0$、信用バブルを $b(t) < 0$ として、

(5-72) $$v(t) = k(t) + b(t)$$

1 人当たりバブルは、標準バブルの場合は預金との裁定の条件から、信用バブルの場合は借り換え、追い貸し、ロールオーバーの条件から、

(5-73) $$\frac{db(t)}{dt} = (r(t) - n)b(t)$$

に従う。

(5-65)に(5-72)を代入し、(5-73)を用いると、財市場の均衡を表わす資本蓄積の方程式を得る。

(5-74) $$\begin{aligned}\frac{dk(t)}{dt} &= f(k(t)) - nk(t) - c(t)\\ &= (r(t) - n)k(t) + w(t) - c(t)\end{aligned}$$

ここで、生産の限界条件は、

(5-75) $$\begin{aligned}r(t) &= f'(k(t))\\ w(t) &= f(k(t)) - f'(k(t))k(t)\end{aligned}$$

以上から、$k(t), c(t), b(t)$ に関する連立微分方程式を得る。

$$\frac{dk(t)}{dt} = f(k(t)) - nk(t) - c(t)$$

(5-76) $$\frac{d(\log c(t))}{dt} = \sigma(f'(k(t)) - \theta - n)$$

$$\frac{db(t)}{dt} = (f'(k(t)) - n)b(t)$$

$v(0) = k(0) + b(0)$ で、$t = 0$ でバブルを導入すると、$v(0)$ 所与として、

標準バブルの場合は、

$k(0)$ を減らして $b(0) > 0$ を導入、

信用バブルの場合は、

$b(0) < 0$ を導入して $k(0)$ を増やす

ことになる。

ところが、

$$\frac{d(b(t)\lambda(t))}{dt} = \frac{db(t)}{dt}\lambda(t) + b(t)\frac{d\lambda(t)}{dt}$$
$$= (r(t) - n)b(t)\lambda(t) - (r(t) - n)b(t)\lambda(t) = 0$$

よって、

$$b(t)\lambda(t) = b(0)\lambda(0) \therefore b(t) = \frac{b(0)\lambda(0)}{\lambda(t)}$$

ゆえに、横断条件(5-41)から、

$$\lim_{T\to\infty} b(T) = \infty (b(0) > 0)$$

または $= -\infty (b(0) < 0)$

ところが、どのような成長経路をとっても、$\lim_{T\to\infty} k(T)$ は有限だから、(5-72)から、1 人当たり金融資産はすべてがバブルになる。これは経済的にあり得ない。よって、もともとバブルはゼロ、$b(0) = 0$ でなければならない。すなわち、代表的消費者が合理的なラムゼー・モデルに、単純にバブルを導入することは出来ない。

しかし、これまでみてきたように、代表的消費者が、多数の消費者の消費をマクロ的に集計して人口平均をとったものの場合には、横断条件、借り放題なし条件が必ずしも成り立たない。この場合には、離散時間の場合と同様に、ラムゼー・モデルであっても、バブルがあり得る。

(6) 連続時間における寿命 T 重複世代モデルとラムゼー・モデルの再現

(a) 時点 s 生まれの１人の消費者の消費行動

時間軸を $t \geq 0$ とし、時点 s 生まれの１人の消費者は、若年期の $s \leq t \leq s+T_1$ に働き、労働所得を稼ぎ、消費し、貯蓄し、老年期の $s+T_1 < t \leq s+T$ に働かず、貯蓄を取り崩して消費し、$t = s+T$ 時点に死ぬ。

時点 s 生まれの人口を N_s とすると、時点 t における時点 s 生まれの人口は、

$$
\begin{aligned}
N(s,t) &= N_s, s \leq t \leq s+T \\
&= 0, t > s+T
\end{aligned}
$$

であり、人口増加率を n とすると、

$$n = \frac{1}{N_s}\frac{dN_s}{ds}, N_s = N_0 e^{ns}$$

時点 s 生まれの１人の消費者は、当初の金融資産はゼロ $v(s,s)=0$、死ぬときの金融資産もゼロ $v(s,s+T)=0$ の条件のもとで、利子率 $r(t)$、賃金率 $w(t), t \geq s$ を所与として、生涯効用を最大化するように、生涯の消費 $c(s,t)$、途中段階の金融資産 $v(s,t), s \leq t$ を選ぶ。時間選好率 $\theta, 0 < \theta < 1$ は各世代共通とする。

(5-77)
$$
\begin{aligned}
&\max U = U(v(s,s)) \\
&= \int_s^{s+T} u(c(s,t))\exp(-\theta(t-s))dt
\end{aligned}
$$

(5-78)
$$\frac{\partial v(s,t)}{\partial t} = r(t)v(s,t) + w(s,t) - c(s,t), t \geq s$$

ここで、時点 s 生まれの消費者の時点 t における賃金率は、

$$
\begin{aligned}
w(s,t) &= w(t), s \leq t \leq s+T_1 \\
&= 0, t > s+T_1
\end{aligned}
$$

ポントリャーギンの最大値原理におけるハミルトニアン、共役変数を $H_s, \lambda(s,t)$ とおくと、

(5-79)
$$
\begin{aligned}
H_s &= u(c(s,t))\exp(-\theta(t-s)) \\
&+ \lambda(s,t)\{r(t)v(s,t) + w(s,t) - c(s,t)\}
\end{aligned}
$$

１階の条件は、

(5-80)
$$\frac{\partial \lambda(s,t)}{\partial t} = -\frac{\partial H_s}{\partial v(s,t)} = -\lambda(s,t)r(t)$$

(5-81)
$$\frac{\partial H_s}{\partial c(s,t)} = 0$$

$$\therefore u'(c(s,t))\exp(-\theta(t-s)) = \lambda(s,t)$$

よって、相対リスク回避度を $1/\sigma$ として、

(5-82)
$$\frac{\partial c(s,t)}{\partial t} = \sigma(r(t)-\theta)c(s,t)$$

$$\frac{1}{\sigma} = -\frac{u''(c(s,t))c(s,t)}{u'(c(s,t))}$$

(5-83)
$$\lambda(s,t) = \lambda(s,s)\exp(-\int_s^t r(\tau)d\tau)$$

横断条件、借り放題なし条件は、

(5-84) $\lambda(s,s+T) = 0$

(5-85) $v(s,s+T)\lambda(s,s+T) = 0$

時点 s 生まれの消費者の時点 t における生涯予算制約式を導くため、(5-82)から時点 t 以降の消費の式を、(5-78)からそれをファイナンスするための時点 t における金融資産の式を求める。

(付録 8.参照)

$\tau \geq t \geq s$ として、

(5-86)
$$c(s,\tau) = c(s,t)\exp(\sigma\int_t^\tau (r(a)-\theta)da$$

(5-87)
$$
\begin{aligned}
v(s,t) &= \int_t^\tau (c(s,b) - w(s,b))\exp(-\int_t^b r(a)da)db \\
&+ v(s,\tau)\exp(-\int_t^\tau r(a)da)
\end{aligned}
$$

時点 t における生涯労働所得は、

(5-88)
$$
\begin{aligned}
h(s,t) &= \int_t^{s+T} w(s,b)\exp(-\int_t^b r(a)da)db \\
&= \int_t^{s+T_1} w(b)\exp(-\int_t^b r(a)da)db
\end{aligned}
$$

とくに、$t = s$ とおいて、生まれた時点におけ

る生涯労働所得は、

(5-89)
$$h(s,s) = \int_s^{s+T} w(s,b)\exp(-\int_s^b r(a)da)db = \int_s^{s+T_1} w(b)\exp(-\int_s^b r(a)da)db$$

さらに(5-87)で、とくに$\tau = s+T$とおいて、時点tにおける金融資産の式を得る。

(5-90)
$$v(s,t) = \int_t^{s+T} (c(s,b)-w(s,b))\exp(-\int_t^b r(a)da)db$$

時点tにおける生涯予算制約式は、

(5-91)
$$\int_t^{s+T} c(s,b)\exp(-\int_t^b r(a)da)db = h(s,t)+v(s,t)$$

とくに$t=s$とおいて、生まれた時点における生涯予算制約式は、

(5-92)
$$\int_s^{s+T} c(s,b)\exp(-\int_s^b r(a)da)db = h(s,s)$$

生涯予算制約式の幾何学的意味は、離散時間の場合は、第 2 節(2)(a)でみたが、連続時間の場合も同様なことが言える。

(5-90)で$t=s$とおくと、

$$\int_s^{s+T} (c(s,b)-w(s,b))\exp(-\int_s^b r(a)da)db = 0$$

ところが、(5-83)から、

$$\exp(-\int_s^b r(a)da) = \frac{\lambda(s,b)}{\lambda(s,s)}$$

よって、上の式は、

(5-93)
$$\int_s^{s+T}(c(s,b)-w(s,b))\lambda(s,b)db = 0$$

である。これは、$[s,s+T]$上の関数空間で、$c(s,\cdot)-w(s,\cdot)$と$\lambda(s,\cdot)$が直交することを意味する。(5-29)ででみたように、

(5-94)
$$\lambda(s,\cdot) = \left.\frac{\partial U(v(s,\cdot))}{\partial v(s,\cdot)}\right|_{U=\max}$$

だから、関数空間において、$c(s,\cdot)-w(s,\cdot)$は、

(5-95)
$$gradU(v(s,\cdot)) = \left.\frac{\partial U(v(s,\cdot))}{\partial v(s,\cdot)}\right|_{U=\max}$$

に直交する。

(b) 消費、金融資産のマクロ的集計とその時間的変化

時点tにおける総人口は、

$$N(t) = \int_{t-T}^t N(s,t)ds = \int_{t-T}^t N_s ds = \int_{t-T}^t N_0 e^{ns}ds = \frac{N_0}{n}(1-e^{-nT})e^{nt}$$

うち若世代人口は、

$$N_L(t) = \frac{N_0}{n}(1-e^{-nT_1})e^{nt}$$

若世代人口比率は、$n_L = N_L(t)/N(t)$

時点tの消費、金融資産のマクロ的集計量は、

(5-96)
$$C(t) = \int_{t-T}^t c(s,t)N_s ds$$

(5-97)
$$V(t) = \int_{t-T}^t v(s,t)N_s ds$$

これら集計量の時間的変化をみるには、一般に、

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \{f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t)\} + \int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$$

であることを使う。(付録 9.参照)

とくに{ }内が小さければ、

(5-98)
$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx \approx \int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$$

と出来る。これを用いると、

$$\frac{dC(t)}{dt} = \{c(t,t)N_t - c(t-T,t)N_{t-T}\} + \int_{t-T}^t \frac{\partial c(s,t)}{\partial t}N_s ds$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = \{v(t,t)N_t - v(t-T,t)N_{t-T}\} + \int_{t-T}^t \frac{\partial v(s,t)}{\partial t}N_s ds$$

消費については、{ }の中は、最若年と最老年の消費の差だから、Tが大きければ、無視してよい。金融資産については、{ }の中はゼロである。よって、

(5-99) $$\frac{dC(t)}{dt}=\int_{t-T}^{t}\frac{\partial c(s,t)}{\partial t}N_s ds$$

(5-100) $$\frac{dV(t)}{dt}=\int_{t-T}^{t}\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}N_s ds$$

これらに、(5-82)、(5-78)を代入すると、マクロの集計量の時間的変化が求まる。

(5-101) $$\frac{dC(t)}{dt}=\int_{t-T}^{t}\sigma(r(t)-\theta)c(s,t)N_s ds = \sigma(r(t)-\theta)C(t)$$

(5-102)

$$\frac{dV(t)}{dt}=\int_{t-T}^{t}(r(t)v(s,t)+w(s,t)-c(s,t))N_s ds = r(t)V(t)+W(t)-C(t)$$

ここで、時点tの労働所得のマクロの集計量は

$$W(t)=\int_{t-T}^{t}w(s,t)N_s ds=\int_{t-T_1}^{t}w(t)N_s ds=w(t)N_L(t)$$

(c) 1人当たり消費、1人当たり金融資産、1人当たり資本の時間的変化

時点tにおける1人当たり消費、1人当たり金融資産は、

$$c(t)=\frac{C(t)}{N(t)},v(t)=\frac{V(t)}{N(t)}$$

よって、

$$\frac{dc(t)}{dt}N(t)+c(t)\frac{dN(t)}{dt}=\frac{dC(t)}{dt}$$

から、(5-101)により、

(5-103) $$\frac{dc(t)}{dt}=\{\sigma(r(t)-\theta)-n\}c(t)$$

また(5-102)から、同様に、

(5-104) $$\frac{dv(t)}{dt}=(r(t)-n)v(t)+n_L w(t)-c(t)$$

バブルなしの場合は、

(5-105) $V(t)=K(t)$

よって、(5-102)から、

(5-106) $$\frac{dK(t)}{dt}=r(t)K(t)+W(t)-C(t) = F(K(t),N_L(t))-C(t)$$

若世代1人当たり資本は、

$$k(t)=\frac{K(t)}{N_L(t)}=\frac{N(t)}{N_L(t)}\frac{K(t)}{N(t)}=\frac{1}{n_L}\frac{K(t)}{N(t)}$$

よって、(5-105)の両辺を$N(t)$で割ると、

(5-107) $v(t)=n_L k(t)$

また、

$$\frac{dk(t)}{dt}N_L(t)+k(t)\frac{dN_L(t)}{dt}=\frac{dK(t)}{dt}$$

から、(5-106)により、

$$\frac{dk(t)}{dt}=(r(t)-n)k(t)+w(t)-\frac{1}{n_L}c(t) = f(k(t))-nk(t)-\frac{1}{n_L}c(t)$$

ここで、生産の限界条件は、

$$f(k(t))=r(t)k(t)+w(t)$$
$$r(t)=f'(k(t))$$
$$w(t)=f(k(t))-f'(k(t))k(t)$$

よって、経済全体の1人当たり資本$k(t)$、1人当たり消費$c(t)$は、次の連立微分方程式に従う。

(5-108) $$\frac{dk(t)}{dt}=f(k(t))-nk(t)-\frac{1}{n_L}c(t)$$
$$\frac{dc(t)}{dt}=\{\sigma(f'(k(t))-\theta)-n\}c(t)$$

これはラムゼー・モデルと類似しており、特に$\sigma=1,n_L=1$のときは、ラムゼー・モデルそのものとなる。そのときは、1人当たり変数をあたかも寿命無限の1人の代表的消費者が、生涯効用を最大化するように消費・貯蓄行動していると、ポントリャーギンの最大値原理で定式化してよいように見える。

このとき、共役変数$\lambda(t)$は、時点s生まれ世代の式(5-83)で$s=0$とした場合と同様に、

$$\lambda(t)=\lambda(0)\exp(-\int_0^t r(\tau)d\tau)$$

となる。しかし、これが$t\to\infty$のときゼロに収束し、言い換えれば、カッコのなかの所与の金利$r(t),t\geq 0$の積分が$t\to\infty$のとき無限大に発散

$$\int_0^t r(\tau)d\tau \to \infty$$

しなければならない先験的理由がない。各世代は、有限のT期間生きて死ぬので、各世代の生きている期間についてのこの積分は有限であり、死ぬときには横断条件（5-84)により、$\lambda(t)$はゼロになるからである。

よって、無限寿命の１人の代表的消費者に対しては、横断条件、借り放題なし条件は必ずしも成り立たない。ゆえに、(5-108)の右辺をゼロにするような定常状態はあるが、解は鞍点経路をたどるとは限らないのである。

マクロの平均量の定常状態をk^*, c^*とし、$r^* = f'(k^*)$とおくと$\sigma(r^* - \theta) = n$である。マクロの平均量が動かなくても、個々の消費者の消費は動くことが分かる。

$$\begin{aligned} c(s,t) &= c(s,s)\exp(\sigma(r^* - \theta)(t-s)) \\ &= c(s,s)e^{n(t-s)} \end{aligned}$$

であるから、各世代とも、生まれてから死ぬまで、人口増加率で増加する。これは、離散時間の場合、第 4 節(2)(b)で得た結果と同じである。

バブルありの場合は、

(5-109)　$V(t) = K(t) + B(t)$

が成り立つ。

ここで、標準バブルの場合は、$B(t) > 0$であり、家計の金融資産$V(t)$は、銀行に預金し、それが企業の資本保有$K(t)$のために貸し付けられる部分と、バブル購入$B(t)$にあてられる部分に分かれる。

信用バブルの場合は、$B(t) < 0$であり、企業の資本保有$K(t)$のための貸し付けは、家計の金融資産$V(t)$が銀行に預金され、それが貸し付けられる部分と、銀行の自己資本から家計に貸し付け、それがさらに企業に貸し付けられる部分$B(t)$からなる。

バブルは時点$t = 0$に導入されるとすると、

$$V(0) = K(0) + B(0)$$

となっている。$V(0) > 0$を所与とすると、標準バブル$B(t) > 0$の場合は、$K(0)$を減らし、信用バブル$B(t) < 0$の場合は、$K(0)$を増やすことになる。

標準バブルの場合には、預金との裁定の条件から、信用バブルの場合には、借り換え、追い貸し、ロールオーバーの条件から、バブルは次の式に従う。

(5-110)　$\dfrac{1}{B(t)}\dfrac{dB(t)}{dt} = r(t)$

１人当たりバブルは、

$$b(t) = \frac{B(t)}{N(t)}$$

よって、(5-109)の両辺を$N(t)$で割ると、

(5-111)　$v(t) = n_L k(t) + b(t)$

ここで、$v(0)$は所与とし、標準バブル$b(0) > 0$導入のときは、$k(0)$を減らし、信用バブル$b(0) < 0$導入のときは、$k(0)$を増やす調整が行われる。

$$\frac{db(t)}{dt}N(t) + b(t)\frac{dN(t)}{dt} = \frac{dB(t)}{dt}$$

から、

(5-112)　$\dfrac{db(t)}{dt} = (r(t) - n)b(t)$

(5-109)を(5-102)に代入すると、(5-110)により、バブル項は消えて、(5-106)が再び出る。

よって、経済全体の 1 人当たり資本$k(t)$、1 人当たり消費$c(t)$、1 人当たりバブル$b(t)$は、(5-108)、(5-112)の連立微分方程式に従う。特に、$\sigma = 1$の場合を考え、それを次の形に書く。

(5-113)

$$\frac{dk(t)}{dt} = f(k(t)) - nk(t) - \frac{1}{n_L}c(t)$$

$$\frac{1}{c(t)}\frac{dc(t)}{dt} = f'(k(t)) - \theta - n$$

$$\frac{1}{b(t)}\frac{db(t)}{dt} = f'(k(t)) - n$$

すると、第２式、第３式から、

$$\frac{1}{b(t)}\frac{db(t)}{dt}-\frac{1}{c(t)}\frac{dc(t)}{dt}=\theta$$

よって、

$\log|b(t)|-\log c(t)=\theta t+const.$

ゆえに、

$$\frac{|b(t)|}{c(t)}=\frac{|b(0)|}{c(0)}e^{\theta t}\to\infty(t\to\infty)$$

よって、離散時間の場合と同様に、バブルは消費の無限大倍まで膨らむ。従って、経済変数がマクロの集計量であり、横断条件、借り放題なし条件が成り立たない場合でも、ある時点で不合理性に気づき、修正が行われる。しかし、気づくまではバブルは膨らむ。これは、現実に起こる状況である。

おわりに

本論文が標準理論からどう１歩踏み出したか主要文献と比べ、残された課題を述べる。

(1) 経済主体別および経済全体の統合した経済計算を明確にしたこと。

マクロ経済理論の文献では、理論の展開が主体であり、家計、企業などの経済主体について、期首の資産・負債の状況、期中の経常取引による所得・支出の状況、資本取引による資産・負債の変動の状況、これらを経済全体として統合した場合の状況などは、導入部において言葉で簡単に述べられるのが常である。その結果、どんな経済計算が頭にあるのか、読者にとってあいまいになることがある。

例えば、重複世代モデルでは、資本市場で若世代が当期の貯蓄から資金を供給し、企業が当期末つまり次期期首に必要な資本を取得するための資金を需要するので、若世代の当期の貯蓄イコール次期期首の資本、式で書くと、本論文の(1-16)のとおり、

$$S_{1t}=K_{t+1}$$

となる。これは一見、貯蓄・投資バランスが成り立たないのではないか、と思わせる。しかし、老世代は、前期に供給した資金をすべて取り崩して消費にあてるので、資本市場では当期の資本に当たる量の資金が回収される:

$$S_{2t}=-K_t$$

経済全体の貯蓄は､若世代と老世代の貯蓄の合計だから、

$$S_t=S_{1t}+S_{2t}=K_{t+1}-K_t=I_t$$

となり、経済全体の貯蓄・投資バランスは、本論文の(1-18)のように、通常の形になる。

ダイヤモンドの原論文『新古典派成長モデルおける国債』(1965,p.1128, p.1131-1132)においては､経済全体の貯蓄･投資バランス、若世代の貯蓄イコール次期期首の資本の式は明記されているが、老世代の貯蓄の行方について明記していない。ウィッケンズ『マクロ経済理論』(2008, p.134)などその後の教科書でもこの点が明記されていない。本論文では第１節でこのようなあいまいさを取り除いた。

(2) 標準理論では考慮されていない信用バブルを導入し、その動学的特性を明らかにしたこと。

ティロールのバブルの標準理論『資産バブルと重複世代』(1985,p.1503)では、バブルは資産であるから､マイナスの価値は取り得ず、プラスでなければならないとしている。この立場は、ファーリ・ティロール『バブル的流動性』(2011,定義 1)でも引き継がれている。このため、バブル資産の取得は、家計の貯蓄の運用先の１つとなっている。

これに対して本論文では、次のような信用バブルを考える。家計は、負債側で銀行借り入れによって得た資金を、資産側で企業に貸

し付ける。企業は、負債側の借り入れた資金で、資産側に無価値の財からバブル資本を創出する。銀行は追い貸し・ロールオーバーを続ける。第1節でこの場合の経済計算を行ない、信用バブルは標準バブルでマイナスにした場合に相当することが分かった。

一度マイナスのバブルを許すと、動学的には事態は大きな変化が起こる。第 3 節では、標準バブルでは解は普通の鞍点経路をたどり、しかも動学的に非効率であるのに対し、信用バブルでは解は図 3-4 のように、渦状点または結節点経路をたどり、しかも動学的に効率的であることが明らかにされた。

重複世代モデルでは、若世代がプラスの貯蓄をし、老世代になってそれを取り崩すとするものが多いが、トヴェーデ『重複世代経済』(2010,p.15)では、若世代の貯蓄がゼロでない場合は、政府が貨幣を供給して当期と次期の予算制約をつなぐとし、若世代の貯蓄がプラスの場合の均衡を「サミュエルソン均衡」、マイナスの場合を「古典的均衡」と呼んでいる。しかし、動学的経路の違いには触れていない。

(3) 重複世代モデルで複数均衡と不安定性の具体例を提示したこと。

重複世代モデルでは、1 人当たり資本 k_t についての定差方程式の定常状態を求めることになる。若世代の1人当たり貯蓄関数の形状によっては、その定常状態が複数ある可能性は、ブランシャール・フィッシャー『マクロ経済学講義』(1989,p.95)、トヴェーデ(2010,p.129)で述べられているが、具体的な例は示されていない。

本論文では、第3節で、効用関数は対数線型とし、生産関数を CES 型

$$f(k) = a(\alpha k^{-\rho} + 1 - \alpha)^{-\frac{1}{\rho}}$$

としたとき、$\rho > 0$ のとき、プラスの定常状態の1人当たり資本は2つあり、小さい解は不安定、大きい解は安定であることを、図 3-2-2 で示した。

日本経済の長期低迷について、複数均衡の低活力状態に落ち込んでいるため、という統計物理的モデルが提示されているが、本論文のようなマクロ経済モデルの具体例も参考になろう。

さらに、ミクロの一般均衡理論においては、バラスコ『価値の一般均衡理論』(2011,p.141)にあるように、均衡多様体が波打つ形だと、1 つの資源配分の均衡状態を実現するのに複数の価格があり得るという複数均衡が、被覆(covering)の理論を使って分析されている。

(4) 2 世代重複世代モデル→3 世代重複世代モデル→T 世代重複世代モデル→横断条件なきラムゼー・モデル、の流れを整合的に明らかにし分析していること。

重複世代モデルは2世代が中心である。最新の教科書を見ても、ブーレイ『一般均衡、重複世代モデルおよび最適成長理論』(2007)、トヴェーデ (2010)は、2 世代重複世代モデルで一貫している。　この 1 世代は通常 25 年と考えられており(ウィッケンズ(2008, p.143))、マクロ経済の不安定性やバブルなど現実の問題を考えるには、期間が長期過ぎて、イメージが合わない。この世代をもっと細分したいが、明確な結論が導かれるのは 2 世代であり、3 世代になると、ファーリ、ティロール『バブル的流動性』(2012)のように、数式が一挙に複雑化する。理論的には、2 世代か 3 世代の重複世代モデルで分析し、現実にあてはめるには、定性的な推論を行うことになる。

他方、重複世代モデルでも、コンピュータ・シミュレーションを行うモデルでは、初期のアウアーバッハ、コトリコフ『動的財政政策』(1987)において、すでに５５世代の重複世代モデルで分析している。

また、連続時間モデルにおいては、ブランシャール『債務､赤字､および有限時限』(1985)は、家計の各世代が一定の死亡確率のもとで無限時間の中を生きると前提して、その集計量としてのマクロ経済の最適成長モデルを分析している。

本論文では、2 世代重複世代モデルによりバブルを分析したティロール『資産バブルと重複世代』(1985)を出発点とし、ブランシャール(1985)の死亡確率つき無限世代モデルを参考にしつつ、死亡時点を生まれてから T 期後と特定した T 世代重複世代モデルに発展させることを念頭におき、効用関数を対数線型に特定して、分析を進めるアプローチをとることにした。

第 3 節では、ティロールのモデルにおいて複数均衡の可能性を明らかにするとともに、マイナスの信用バブルを導入して分析した。さらに第 4 節でそれを 3 世代重複世代モデルに拡張し、類似の結果が出ることを示した。

3 世代重複世代モデルは、直ちに T 世代重複世代モデルに拡張出来、複数均衡の可能性までは同じ分析が出来る。だがバブルの分析をするには複雑過ぎる。しかし、T が大きいときは、全世代について合計したマクロの集計量が、ラムゼー・モデルで近似されることが分かる。ただし、各世代は横断条件に拘束されていても、マクロの集計量は横断条件で拘束される先験的理由がない。こうして本論文のアプローチでは、マクロの集計量に横断条件の拘束がないため、標準理論で棄却されてきたラムゼー・モデルの場合のバブルが、息を吹き返すことが明らかになった。

T 世代重複世代モデルでは、各家計は、自分の寿命の範囲では横断条件に従うが、それを超えて、無限時間の中で、経済全体の横断条件に従うインセンティブがない。現実に多くの国で財政が破綻に追い込まれていくのは、このためであろう。

なお第 4 節、付録 7 では、副産物として、「資本蓄積をライフサイクルによる貯蓄でまかなえるか」というコトリコフ・サマーズ『マクロの資本蓄積における世代間移転の役割』(1981)のテーマに関して、彼らの 3 世代重複世代モデルから T 世代重複世代モデルに拡張し、マクロの金融資産がプラスになるための条件を、数学的に考察している。

(5) 寿命無限モデルのときの資本蓄積、重複世代モデルのときの均衡がパレート最適となるためのキャス、バラスコ、シェルの条件を統一的な視野から見直したこと。

本論文のメッセージは、T 世代重複世代モデルでは、経済全体の横断条件が守られず、マクロ変数が発散する可能性があるということであるが、発散しない条件についても整理している。

マクロ経済理論では、時間を $t = 0,1,2,...,T$ の離散時間でとり、この時間の期限 T は有限として計算し、その後期限は無限の未来 $T \to \infty$ とする手続きをとる。時間を無限大にすると発散解が生ずる可能性があるので、標準理論では、発散しないための条件を明らかにしてきた。

寿命無限のラムゼー・モデルにおいて、サージェント『動学的マクロ経済理論』(1987)、リュンクヴィスト・サージェント『再帰的マクロ経済理論』(2004)は、解は 2 乗和が有限な関数空間 l_2 の範囲で求めるようにしている。

2 世代重複世代モデルにおいて、トヴェーデ (2010)は、時間範囲を $-\infty < t < \infty$ ないし $0 \le t < \infty$ として分析している。この場合、負担を将来世代に回し続けることで、全世代の効用を高めることが出来、均衡状態がパレート最適にならないことが起こる。それを避けるために、時点 t における財の時点 0 における価格が p_t のとき、均衡がパレート最適である条件が、バラスコ、シェル(1980)の条件(ト

ヴェーデ(2010,p.42)

$$\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{p_t}=\infty$$

である。金利を r_t とすれば、この条件は、

$$\sum_{t=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{t}(1+r_i)=\infty$$

になる。これは、寿命無限のモデルで過剰資本蓄積がないという意味のパレート最適を示すキャス(1972)の条件になる。

本論文では第 2 節で、寿命無限のラムゼー・モデルの場合、ラグランジュ乗数 λ_t^0 がこの p_t に相当し、分析が意味を持つためには、生涯予算制約式が収束し、

$$\sum_{t=0}^{\infty}\lambda_t^0<\infty$$

とならねばならないこと、これはキャス、バラスコ、シェルの条件を満たすこと、さらにラムゼー・モデルの最適成長経路はこの条件を満たすことを示した。

生涯予算制約式の収束の条件と同じ条件

$$\sum_{t=0}^{\infty}p_t<\infty$$

は、ボーレイ(2007,p.479)において、重複世代モデルにおける均衡のパレート最適のための条件として、提示されている。

(6) 離散時間のモデルから連続時間のモデルに整合的に移行出来ることを示したこと。

マクロ経済理論では、前述のように離散時間のもとで、財は 1 財とし、家計、企業が効用、利益の時間的フローの現在価値の最大化を図るように定式化するのが一般的である。離散時間なので、最大化は、簡単な場合はラグランジュ乗数法、複雑化したり確率分布を入れたりする場合にはベルマンの動的計画法を使うことになる。しかし、資本蓄積を含む最適成長モデルでは、連続時間で、ポントリャーギンの最大値原理を使うことが多い。このため、離散時間による分析と、連続時間による分析は、類似点は認めながらも、分析者の趣味により、別箇に行われることが多い。

これに対して本論文では、第 4 節までは離散時間のもとで、通常の有限次元空間におけるラグランジュ乗数法により分析を行った後、第 5 節では、関数空間におけるラグランジュ乗数法から入ることにより、議論を平行して、整合的に進められることを示した。

これは、数学的には早くから知られていたことであり、本論文においては、レオナール・ヴァンロン『経済学における最適制御理論と静学的最適化』(1992)に加えて、リュステルニク・ソボレフ『関数解析の基礎』(1965, 第 8 章§11)、ザイドラー『非線形関数解析 III. 変分法と最適化』(1984, 第 43、48 章)を参照している。第 5 節で扱う問題は、数学的には等周問題という簡単な形をしているので、関数空間のラグランジュ乗数法を使い、さらにベルマンの原理を使うと、ポントリャーギンの最大値原理の式を導くことが出来る。さらに有限次元の場合と同様に、包絡線定理を導き、初期条件の変動に対して、目的関数の最適値がどう動くかも分析出来る。関数空間における分析では、この初期条件の変動は、インパルス関数で入れる必要があり、それによって目的関数の最適値がどう動くかは、ベンスーザン『最適制御における摂動法』(1988,p.255)を参照している。

(7) 残された課題

本論文では、バブルの発生メカニズムとして、2 世代、3 世代重複世代モデルでは信用バブルを提示し、その動学的経路は効率的で渦巻き状になるとしている。さらに T 世代重複世代モデルで T が大きくなると、横断条件が成り立たないラムゼー・モデルになり、ラムゼー・モデルのバブルのメカニズムが生き返ると主張している。

2 世代重複世代モデルにおける信用バブル

は、バブル崩壊にはならないが、渦巻き状の経路をたどり、循環しながらゼロ成長をすることになる。横断条件が成り立たないラムゼー・モデルのバブルでは、バブルの消費に対する比率が無限大に膨らむので、いずれ将来期待が誤りだったということに気付き、バブル崩壊する。いずれにしてもバブルの状況から抜け出す必要があるとすれば、どういう状況が生まれるのか？

将来期待がはずれ、信用バブルが崩壊すれば、家計や企業では、資産側でバブル資産は無価値になるが、負債側で負債はそのまま残る。銀行は貸出資産が不良資産化し、自己資本が毀損する。いずれも、現実のバブル崩壊で見慣れた状況である。そこで政府が公的資金を投入して､銀行の不良資産を買い取ると、銀行、家計、企業は救済されるが、政府は無価値の資産をバックに国債を発行したことになるから、インフレになり、いずれ国債の価値はゼロになる。現実は、そうなる前に、増税して国債の元利払いにあて、国債の信用を維持しようとするか、または不良資産の価値がまたもとに戻ると期待して国債の増発を続けるかの試行錯誤が行なわれている。日本のデフレは、借金して土地・株式にカネを注ぎ込んだ信用バブルにこりて、こんどは貯蓄をひたすら現金という紙切れに注ぎ込む標準バブルが起り、カネの価値が上がり、モノの価値が下がり続けている状況と解釈出来る。政府・日銀は、カネを大量に発行して、カネの価値を下げ、インフレにしようとしていることになる。

将来期待に基づき資本蓄積のための投資を増やした後、その期待が実現せず投資が無駄だと分かったとき、借り手は破産し、貸し手には価値の低い資産が残る。この破綻の前後で、経済の均衡は維持されるのか、という問題は､アロー･ハーン『一般競争分析』(1971､第 14 章)で例示的に分析されている。

逆に信用バブルが崩壊しない場合として、バブル資本がベンチャー企業による株式一般公開により本当の生産的資本となる場合がある。このときは、ある時点で、家計、企業の資産が純増することになる。ここにベンチャー企業の成功・破綻の確率分布を入れれば、確率的なバブルの分析につながる。

さらに 2 国間でバブルを考えると、経常収支黒字国が赤字国にカネを貸す姿は、赤字国の信用バブル、黒字国の標準バブルが起こっていると解釈可能である。このようにバブルの分析について残された課題は多い。

不安定性の分析に関しては、第 5 節で、家計の時間選好率が異なる場合に、経済全体としては、循環的な動きが起こる可能性を示した。その運動を示す微分方程式は、線型と対数線型が重なり、複雑である。しかし国際貿易においては、2 国間で時間選好率が異なることは十分あることなので、この面の分析も意味があると考える。

付録

付録 1. 定数係数の 2 次元線形微分方程式と定差方程式の解の状態 (第 2、3、4 節)

微分方程式と定差方程式を次の形に書く。

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

$$x_{t+1} - x_t = Ax_t$$

簡単のために、A の 2 つの固有値 λ_1, λ_2 が異なる場合について述べる。それぞれに対応する 1 次独立な固有ベクトルを

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \end{pmatrix}$$

とおくと、 $Av_i = \lambda_i v_i, i = 1,2$

行列　$T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$ を考えると、

$$AT = T\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

よって、$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$x(t) = Ty(t), x_t = Ty_t$ と変数変換すると、
もとの微分方程式は、

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} y(t)$$

定差方程式は、

$$y_{t+1} - y_t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} y_t$$

$$y_{t+1} = \begin{pmatrix} 1+\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1+\lambda_2 \end{pmatrix} y_t$$

となる。よって、

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} y(0)$$

$$y_t = \begin{pmatrix} (1+\lambda_1)^t & 0 \\ 0 & (1+\lambda_2)^t \end{pmatrix} y_0$$

ゆえに、

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$x_t = c_1 v_1 (1+\lambda_1)^t + c_2 v_2 (1+\lambda_2)^t$$

ここに、$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = T^{-1}x_0, or T^{-1}x(0)$

本稿では、変数 $x(t), x_t$ は定常状態からの乖離を表わす。

微分方程式のときは、固有値 λ_1, λ_2 が実根で符号が異なるならば鞍点、同符号ならば結節点になり、虚根ならば渦状点になる。

まず実根で符号が異なるならば、

$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ として、 $c_2 = 0$ のとき、

$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t}$ が鞍点経路になる。

その他の鞍点経路は発散する。

実根でプラスの同符号ならば、結節点で発散し、マイナスの同符号ならば、収束する。

虚根ならば、2 つの固有値は共役、2 つの固有ベクトルは共役なので、固有値をあらためて $\mu^1 + i\mu^2$ 、固有ベクトルをあらためて $v_1 + iv_2$ とおくと、

$$(v_1 + iv_2)e^{(\mu^1 + i\mu^2)t}$$

$$= e^{\mu^1 t}(v_1 \cos \mu^2 t - v_2 \sin \mu^2 t)$$

$$+ ie^{\mu^1 t}(v_1 \sin \mu^2 t + v_2 \cos \mu^2 t)$$

の実部と虚部がそれぞれ 1 次独立な解になる。定常状態は、渦状点であり、 $\mu^1 > 0$ ならば発散し、 $\mu^1 < 0$ ならば収束する。

定差方程式のときは、$|1+\lambda_i|$ と 1 の大小によって発散、収束が決まるので、次のように拡張された対数関数を使うと、微分方程式との対応がはっきりする。

$$\log(1+\lambda_i) = \log|1+\lambda_i| + i\arg\frac{1+\lambda_i}{|1+\lambda_i|}$$

ここで、 $\lambda_i = \lambda_i^1 + i\lambda_i^2$ とおいて、

$$|1+\lambda_i| = \sqrt{(1+\lambda_i^1)^2 + \lambda_i^2}$$

$$\arg\frac{1+\lambda_i}{|1+\lambda_i|} = \tan^{-1}\frac{\lambda_i^2}{1+\lambda_i^1}$$

さらに、

$$\mu_i^1 = \log|1+\lambda_i|$$

$$\mu_i^2 = \arg\frac{1+\lambda_i}{|1+\lambda_i|}$$

とおいて、

$$\log(1+\lambda_i) = \mu_i^1 + i\mu_i^2$$

$$1+\lambda_i = e^{\mu_i^1 + i\mu_i^2}$$

実根の場合には、 $\lambda_i^2 = 0$

$$\mu_i^1 = \log|1+\lambda_i|$$

$$\mu_i^2 = \arg 1 or \arg(-1) = 0 or \pi$$

つまり、 $1+\lambda_i > 0 \Rightarrow \mu_i^2 = 0$
$1+\lambda_i < 0 \Rightarrow \mu_i^2 = \pi$

であり、

$$(1+\lambda_i)^t = e^{\mu_i^1 t}\cos\mu_i^2 t$$

と書ける。

よって、 μ_1^1, μ_2^1 の符号が異なるならば、すなわち、 $|1+\lambda_i|$ の一方が 1 より大、他方が 1 より小ならば、鞍点となる。 $\mu_1^1 < 0 < \mu_2^1$ として、 $c_2 = 0$ のとき、

$$x_t = c_1 v_1 e^{\mu_1^1 t}\cos\mu_1^2 t$$

が鞍点経路になる。

μ_1^1, μ_2^1 が同符号ならば、すなわち、 $|1+\lambda_i|$ がともに 1 より大か 1 より小ならば、結節点になり、前者の場合は発散、後者の場合は収束する。

このように、微分方程式の場合と異なり、 $1+\lambda_i$ がマイナスのときは、経路は 2 方向から振動しながら動く。

虚根の場合は、共役な固有値を $\lambda = \lambda^1 + i\lambda^2$、固有ベクトルを $v = v_1 + iv_2$ とおくと、

$$1+\lambda = 1+\lambda^1 + i\lambda^2 = e^{\mu^1 + i\mu^2}$$

$$\begin{aligned}
&(v_1 + iv_2)(1+\lambda)^t \\
&= (v_1 + iv_2)e^{(\mu^1 + i\mu^2)t} \\
&= e^{\mu^1 t}(v_1\cos\mu^2 t - v_2\sin\mu^2 t) \\
&+ ie^{\mu^1 t}(v_1\sin\mu^2 t + v_2\cos\mu^2 t)
\end{aligned}$$

の実部と虚部がそれぞれ 1 次独立な解になる。定常状態は、渦状点であり、 $\mu^1 > 0$ ならば、すなわち $|1+\lambda| > 1$ ならば発散し、 $\mu^1 < 0$ ならば、すなわち $|1+\lambda| < 1$ ならば収束する。

付録 2. 横断条件に反する経路 (第 2 節)

t が十分大きければ、 $f'(k_t) < n$ ならば、十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して、 t_0 が存在し、 $t \geq t_0$ ならば、

$$f'(k_t) - n < -\varepsilon$$

(2-61)により、

$$\frac{c_{t+1} - c_t}{c_t} = \sigma(f'(k_{t+1}) - \theta - n) < -\sigma(\theta + \varepsilon)$$

よって、

$$\begin{aligned}
c_{t+1} &< (1 - \sigma(\theta+\varepsilon))c_t < \cdots \\
&< (1 - \sigma(\theta+\varepsilon))^{t-t_0+1} c_{t_0}
\end{aligned}$$

$u'(c_{t+1}) = c_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}}$ だから、 $c_{t+1} = (u'(c_{t+1}))^{-\sigma}$

ゆえに、

$$(u'(c_{t+1}))^{-\sigma} < (1 - \sigma(\theta+\varepsilon))^{t-t_0+1} c_{t_0}$$

$$u'(c_{t+1}) > (1 - \sigma(\theta+\varepsilon))^{-\frac{t-t_0+1}{\sigma}} c_{t_0}^{-\frac{1}{\sigma}}$$

よって、

$$\frac{u'(c_t)}{(1+\theta)^t} > \frac{1}{((1+\theta)(1-\sigma(\theta+\varepsilon))^{\frac{1}{\sigma}})^t} \cdot const$$

ここで、

$$((1+\theta)(1-\sigma(\theta+\varepsilon))^{\frac{1}{\sigma}} \approx 1-\varepsilon$$

だから、$t \to \infty$ のとき、上の不等式の右辺は $\to \infty$。よって、

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u'(c_t)}{(1+\theta)^t} = \infty$$

これは横断条件(2-35)に反する。

付録3. 重複世代モデルの定常状態　(第３節)

減価償却を引く前の生産関数 $g(k)$ は、$g(0)=0, g'(0)=\infty, g'(\infty)=0$ を満たす。本稿で考えているように、これから減価償却 δk を引いた減価償却控除後の生産関数を $f(k)=g(k)-\delta k$ とおくと、$f(0)=0$、$f'(0)=\infty, f'(\infty)=-\delta$ が成り立つ。

また、

$$\frac{f(k)}{k} - f'(k) = \frac{g(k)-\delta k}{k} - (g'(k)-\delta)$$
$$= \frac{g(k)}{k} - g'(k)$$

だから、この式は、減価償却控除前と控除後で値は変わらない。

この前提のもとに、

$$A(k) = \frac{f(k)}{k} - f'(k),$$

$$B(k) = \frac{1}{(1+\beta)(2+n)}\left(\beta - \frac{1}{1+f'(k)}\right)$$

の動きを調べ、$A(k), 1/B(k)$ のグラフを描き、それらの交点

$$A(k) = \frac{1}{B(k)}$$

のようすを調べる。

$B(k)$ は、$B(0) = \beta/((1+\beta)(2+n)) > 0$,

$$B(\infty) = \frac{1}{(1+\beta)(2+n)}(\beta - \frac{1}{1-\delta}) < 0$$

であり、$f''(k) < 0$ だから、$f'(k)$ は k が増えると減る。よって、$B(k)$ は k が増えると減る。ゆえに、ある $\bar{k}$ で

$$\beta = \frac{1}{1+\theta} = \frac{1}{1+f'(\bar{k})}, f'(\bar{k}) = \theta$$

となり、このとき $B(\bar{k}) = 0$ である。

これから、k が 0 から増えていくときの $1/B(k)$ の動きを見ると、まず

$$1/B(0) = (2+\theta)(2+n) > 0$$

$1/B(k)$ は、このプラスの値から出発して増加を続け、$\bar{k}$ に近づくにつれ、∞ に発散する。

次に $A(k)$ の動きを調べる。$A(k)$ における生産関数 $f(k)$ は、減価償却を控除していないとしてよい。

$k \downarrow 0$ のとき、

$$\frac{f(k)}{k} = \frac{f(k)-f(0)}{k} \to f'(0) = \infty$$

なので、$A(k)$ は $\infty - \infty$ で一般には値が不確定となるので、さらに生産関数 $f(k)$ の形を特定化する必要がある。

コブ・ダグラス型のときは、

$$f(k) = ak^{\alpha}, 0 < \alpha < 1$$

だから、

$$A(k) = a(1-\alpha)k^{\alpha-1}$$

よって、$A(0) = \infty$ かつ $A(k)$ は減少関数であり、$A(\infty) = 0$。

CES 型のときは、

$$f(k) = a(\alpha k^{-\rho} + 1 - \alpha)^{-\frac{1}{\rho}},$$
$$\rho > -1, 0 < \alpha < 1$$

だから、

$$\frac{f(k)}{k} = \frac{a}{(\alpha + (1-\alpha)k^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}}$$
$$= \frac{ak^{-1}}{(\alpha k^{-\rho} + 1 - \alpha)^{\frac{1}{\rho}}}$$

$$f'(k)=\frac{a\alpha}{(\alpha+(1-\alpha)k^{\rho})^{\frac{1+\rho}{\rho}}}$$
$$=\frac{a\alpha k^{-(1+\rho)}}{(\alpha k^{-\rho}+1-\alpha)^{\frac{1+\rho}{\rho}}}$$

よって、

$$A(k)=\frac{a(1-\alpha)k^{\rho}}{(\alpha+(1-\alpha)k^{\rho})^{\frac{1+\rho}{\rho}}}$$
$$=\frac{a(1-\alpha)k^{-1}}{(\alpha k^{-\rho}+1-\alpha)^{\frac{1+\rho}{\rho}}}$$

ゆえに、$\rho>0$のときは、

$\lim_{k\to0}A(k)=0,\lim_{k\to\infty}A(k)=0$

また$-1<\rho<0$のときは、

$\lim_{k\to0}A(k)=\infty,\lim_{k\to\infty}A(k)=0$

さらに、$k^{\rho}=x$とおくと、

$$A(k)=\frac{(1-\alpha)ax}{(\alpha+(1-\alpha)x)^{\frac{\rho+1}{\rho}}}$$

よって、

$$\frac{d}{dx}A(k)=\frac{(1-\alpha)a(\alpha-\frac{1-\alpha}{\rho}x)}{(\alpha+(1-\alpha)x)^{\frac{1+2\rho}{\rho}}}$$

ゆえに、$-1<\rho<0$のときは、

$$\frac{d}{dx}A(k)>0$$

である。

$$\frac{dx}{dk}=\rho k^{\rho-1}<0$$

だから、$A'(k)<0$

よって、$A(k)$は、kがゼロから増えるとき、無限大から減少していって、ゼロに近づく。

$\rho>0$のときは、

$$x=\frac{\alpha\rho}{1-\alpha},k=\overline{\overline{k}}=\left(\frac{\alpha\rho}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

において、$A'(\overline{\overline{k}})=0$

$k<\overline{\overline{k}}$ならば$A'(k)>0$

$k>\overline{\overline{k}}$ならば$A'(k)<0$

よって、$A(k)$は、kがゼロから増えるとき、ゼロから増えていき、$k=\overline{\overline{k}}$でピークをつけ、それ以降減っていき、ゼロに近づく。

付録 4. 定常状態の安定性 (第 3 節)

定常状態の安定性を見るため、(3-20)から、

(A-3-1)

$$0<\frac{dk_{t+1}}{dk_t}$$
$$=\frac{-\frac{\beta}{1+\beta}k_tf''(k_t)}{(2+n)-\frac{1}{1+\beta}\frac{f''(k_{t+1})(k_{t+1}+f(k_{t+1}))}{(1+f'(k_{t+1}))^2}}$$

この$k_{t+1}=k_t=k=0$における値を調べる。

生産関数がコブ・ダグラス型のときは、

$$f'(k)=a\alpha k^{\alpha-1},$$
$$f''(k)=a\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2}$$

だから、

$$kf''(k)=a\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-1}$$
$$f(k)f''(k)=a^2\alpha(\alpha-1)k^{2\alpha-2}$$
$$(1+f'(k))^2=1+2a\alpha k^{\alpha-1}+a^2\alpha^2k^{2\alpha-2}$$

$k\downarrow0$のとき、(A3-1)の分母はプラスの一定値に収束し、分子はプラスの無限大に発散する。よって、

$$\left.\frac{dk_{t+1}}{dk_t}\right|_{k=0}=\infty$$

よって、$k=0$の定常状態は不安定である。

生産関数が CES 型のときは、

$$f(k)=\frac{ak}{(\alpha+(1-\alpha)k^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}}$$
$$=\frac{a}{(\alpha k^{-\rho}+1-\alpha)^{\frac{1}{\rho}}}$$

$$f'(k)=\frac{a\alpha}{(\alpha+(1-\alpha)k^{\rho})^{\frac{1}{\rho}+1}}$$
$$=\frac{a\alpha k^{-(1+\rho)}}{(\alpha k^{-\rho}+1-\alpha)^{\frac{1}{\rho}+1}}$$

$$f''(k)$$
$$=-a\alpha(1-\alpha)\frac{1+\rho}{\rho}\frac{k^{\rho-1}}{(\alpha+(1-\alpha)k^{\rho})^{\frac{1}{\rho}+2}}$$
$$=-a\alpha(1-\alpha)\frac{1+\rho}{\rho}\frac{k^{-\rho-2}}{(\alpha k^{-\rho}+1-\alpha)^{\frac{1}{\rho}+2}}$$

だから、

$$kf''(k)$$
$$=-a\alpha(1-\alpha)\frac{1+\rho}{\rho}\frac{k^{\rho}}{(\alpha+(1-\alpha)k^{\rho})^{\frac{1}{\rho}+2}}$$
$$=-a\alpha(1-\alpha)\frac{1+\rho}{\rho}\frac{k^{-\rho-1}}{(\alpha k^{-\rho}+1-\alpha)^{\frac{1}{\rho}+2}}$$

$$f(k)f''(k)=-a^2\alpha(1-\alpha)\frac{1+\rho}{\rho}\frac{k^{\rho}}{(\alpha+(1-\alpha)k^{\rho})^{\frac{2}{\rho}+2}}$$
$$=-a^2\alpha(1-\alpha)\frac{1+\rho}{\rho}\frac{k^{-\rho-2}}{(\alpha k^{-\rho}+1-\alpha)^{\frac{2}{\rho}+2}}$$

$$(1+f'(k))^2=1+2f'(k)+(f'(k))^2$$
$$=1+\frac{2a\alpha}{(\alpha+(1-\alpha)k^{\rho})^{\frac{1}{\rho}+1}}+\frac{a^2\alpha^2}{(\alpha+(1-\alpha)k^{\rho})^{\frac{2}{\rho}+2}}$$
$$=1+\frac{2a\alpha k^{-1-\rho}}{(\alpha k^{-\rho}+1-\alpha)^{\frac{1}{\rho}+1}}+\frac{a^2\alpha^2k^{-2-2\rho}}{(\alpha k^{-\rho}+1-\alpha)^{\frac{2}{\rho}+2}}$$

$\rho>0$のときは、$k\downarrow 0$のとき、

$$\left.\frac{dk_{t+1}}{dk_t}\right|_{k=0}=0$$

よって、$k=0$の定常状態は安定である。

$-1<\rho<0$のときは、(A-3-1)で

$k_{t+1}=k_t=k$として、次のように書きかえる。

$$\left.\frac{dk_{t+1}}{dk_t}\right|_{k}=-\frac{\beta}{1+\beta}\frac{1}{\dfrac{2+n}{kf''(k)}-\dfrac{1}{1+\beta}\dfrac{1+\frac{f(k)}{k}}{(1+f'(k))^2}}$$

分母の第1項にある$\dfrac{1}{kf''(k)}$は、$k\downarrow 0$のとき

$(\alpha k^{-\rho}+1-\alpha)^{\frac{1}{\rho}+2}k^{\rho+1}\to 0$だから、ゼロに

収束する。分母の第2項は

$$\frac{1+\frac{f(k)}{k}}{(1+f'(k))^2}$$
$$=\frac{1+\dfrac{a}{(\alpha k^{-\rho}+1-\alpha)^{\frac{1}{\rho}}k}}{1+\dfrac{2a\alpha}{(\alpha k^{-\rho}+1-\alpha)^{\frac{1}{\rho}+1}k^{1+\rho}}+\dfrac{a^2\alpha^2}{(\alpha k^{-\rho}+1-\alpha)^{\frac{2}{\rho}+2}k^{2+2\rho}}}$$

だから、分母と分子に

$(\alpha k^{-\rho}+1-\alpha)^{\frac{2}{\rho}+2}k^{2+2\rho}$をかけると、

$k\downarrow 0$のとき、ゼロに収束する。よって、

$\left.\dfrac{dk_{t+1}}{dk_t}\right|_{k}$の分母は、$k\downarrow 0$のとき、ゼロに収束

する。ゆえに、

$$\left.\frac{dk_{t+1}}{dk_t}\right|_{k=0}=\infty$$

よって、$k=0$の定常状態は不安定である。

付録 5. 信用バブルの渦状点 (第 3 節)

信用バブルのとき、固有方程式(3-41)の解の状態を調べる。

$$\varphi(\lambda)=\lambda^2$$
$$+\left(\frac{1}{1+n}r'(l^*)b^*+1-\frac{\beta}{1+\beta}w'(l^*)\right)\lambda$$
$$+\frac{1}{1+n}r'(l^*)b^*=0$$

ここで

$$r'(l^*)<0, w'(l^*)>0, b^*<0$$

固有方程式は、

$$x^2+(a+1-b)x+a=0, a>0, b>0$$

の形をしているから、判別式は、

$$D=(a+1-b)^2-4a$$
$$=a^2-2(1+b)a+(1-b)^2$$
$$=\{a-(\sqrt{b}+1)^2\}\{a-(\sqrt{b}-1)^2\}$$

の形をしている。よって、虚根となるのは、

$$(\sqrt{b}-1)^2<a<(\sqrt{b}+1)^2$$

のときである。これをもとの固有方程式にあてはめると、

$$\left(\sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}w'(l^*)}-1\right)^2<\frac{1}{1+n}r'(l^*)b^*$$
$$<\left(\sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}w'(l^*)}+1\right)^2$$

のとき虚根となる。各辺に

$$\frac{1+n}{r'(l^*)}<0$$

をかけて、本文の結果を得る。

次に、虚根を $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$ とおいて、$|1+\lambda|^2$ を計算する。虚根は、

$$\frac{1}{2}(b-a-1)+\frac{1}{2}\sqrt{-1}\sqrt{4a-(b-a-1)^2}$$

の形をしているから、$(1+\lambda_1)^2+\lambda_2^2$ は、

$$\frac{1}{4}(b-a+1)^2+\frac{1}{4}\{4a-(b-a-1)^2\}$$
$$=a+\frac{1}{4}\{(b-a+1)^2-(b-a-1)^2\}$$
$$=a+\frac{1}{4}\cdot4(b-a)=b$$

の形になる。もとの固有方程式にあてはめると、

$$(1+\lambda_1)^2+\lambda_2^2=\frac{\beta}{1+\beta}w'(l^*)$$

となり、本文の結果を得る。

付録 6. 3 世代モデルの定常状態への経路 (第 4 節)

(4-20)を再掲する。

$$(4\text{-}20)\quad \begin{pmatrix}\Delta l_{t+1}^1\\ \Delta l_{t+1}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\Delta l_t^1\\ \Delta l_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta l_t^1\\ \Delta l_t\end{pmatrix}$$

ここで、

$$a_{11}=\beta_1 r'(l^*)w(l^*)+\beta_2 w'(l^*)-1$$
$$a_{12}=\beta_1(1+r(l^*))w'(l^*)>0$$
$$a_{21}=1, a_{22}=-1$$

この行列を A、固有値を λ とすると、固有方程式は、

$$\varphi(\lambda)=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$
$$=\lambda^2-(a_{11}-1)\lambda-(a_{11}+a_{12})=0$$

この判別式は、

$$D=(1-a_{11})^2+4(a_{11}+a_{12})=(1+a_{11})^2+4a_{12}>0$$

ゆえに、固有値は実根 $\lambda_1<\lambda_2$ である。

固有値 λ_i に対応する固有ベクトルを

$\begin{pmatrix}x_i^1\\ x_i^2\end{pmatrix}$ とすると

定差方程式(4-17)の解は、

$$\begin{pmatrix} \Delta l_t^1 \\ \Delta l_t \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} (1+\lambda_1)^t + c_2 \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \end{pmatrix} (1+\lambda_2)^t$$

の形となる。

2 次方程式 $\varphi(\lambda)=0$ の根の公式から、

$$\lambda = \frac{a_{11}-1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a_{11}+1)^2 + 4a_{12}}$$

$a_{12} > 0$ だから、

$$\lambda_1 < \frac{a_{11}-1}{2} - \frac{|a_{11}+1|}{2},$$

$$\lambda_2 > \frac{a_{11}-1}{2} + \frac{|a_{11}+1|}{2}$$

これから、

$$\lambda_1 < a_{11} < -1 < \lambda_2 \text{ または}$$

$$\lambda_1 < -1 < a_{11} < \lambda_2$$

が分かる。これから、$1+\lambda_1$ はマイナス、$1+\lambda_2$ はプラスである。両者の関係は、

$$(1+\lambda_1)(1+\lambda_2) = 1 + (\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_1\lambda_2$$
$$= 1 + (a_{11}-1) - (a_{11}+a_{12}) = -a_{12} < 0$$

となっている。上の不等式は、

$1+\lambda_1 < 1+a_{11} < 0 < 1+\lambda_2$　または

$1+\lambda_1 < 0 < 1+a_{11} < 1+\lambda_2$

とも書ける。

$1+\lambda_1$ に対応する分枝については、

$$-1 < 1+\lambda_1, -2 < \lambda_1, \varphi(-2) > 0$$

つまり、$\varphi(-2) = 2 + a_{11} - a_{12} > 0$

となっているとき、収束する。それ以外のときは発散する。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \end{pmatrix} \quad \text{から、}$$

$$\frac{x_i^1}{x_i^2} = 1 + \lambda_i$$

であるから、$2 + a_{11} - a_{12} > 0$ のとき、$1+\lambda_1$ に対応する解の分枝の傾きは、絶対値が 1 より小さい。

次に、$1+\lambda_2$ に対応する分枝について調べる。

まず $a_{11} > 0$ のときは、

$$\lambda_1\lambda_2 = -(a_{11}+a_{12}) < 0$$

から、$\lambda_2 > 0$ である。よって、$1+\lambda_2 > 1$ であり、これに対応する分枝は発散する。

$a_{11} < 0$ のときは、

$$\lambda_1\lambda_2 = -(a_{11}+a_{12})$$

から、$a_{11}+a_{12} > 0$ ならば、前に見たように $\lambda_1 < -1$ だから、$\lambda_2 > 0$ である。よって、$1+\lambda_2 > 1$ であり、これに対応する定差方程式の分枝は発散する。

$a_{11}+a_{12} < 0$ ならば、$\lambda_2 < 0$ となり、$0 < 1+\lambda_2 < 1$ となるから、これに対応する分枝も収束する。

図 4-2-1,3,4 は、$1+\lambda_1$ に対応する分枝が収束する場合である。図 4-2-1,3 では、$1+\lambda_2$ に対応する分枝が発散し、定常状態は鞍点になる。図 4-2-4 では、$1+\lambda_2$ に対応する分枝も収束し、定常状態は結節点になる。

これに対して図 4-2-2 は、$1+\lambda_1$ に対応する分枝は、$1+\lambda_1$ がマイナスで絶対値が 1 を超えるので、定常状態に向かうが行き過ぎるため、発散する。$1+\lambda_2$ に対応する分枝も発散するので、常に発散する。

付録 7. マクロの家計の金融資産プラスか (第 4 節)

(4-54)を再掲する。

$$\varphi(\beta, r, T, T_1)$$
$$= \sum_{\tau=1}^{T_1} r^\tau \tau - (T_1+1)\sum_{\tau=1}^{T-1} r^\tau \gamma_\tau + (T_1+1)\sum_{\tau=T_1+1}^{T-1} r^\tau$$

(ケース 1) 人口一定で、$n=0, r=1$ のとき

$$\varphi(\beta, 1, T, T_1)$$
$$= \frac{T_1(T_1+1)}{2} - (T_1+1)\sum_{\tau=1}^{T-1}\gamma_\tau + (T_1+1)(T-1-T_1)$$
$$= (T_1+1)(T-1-\frac{T_1}{2} - \sum_{\tau=1}^{T-1}\gamma_\tau)$$

(ケース 1-1)さらに時間選好率ゼロで、

$\theta=0,\beta=1$のとき

$$\varphi(1,1,T,T_1)=(T_1+1)(T-1-\frac{T_1}{2}-\frac{1}{T}\cdot\frac{T(T-1)}{2})$$
$$=(T_1+1)\frac{T-1-T_1}{2}\geq 0$$

よって、人口一定、賃金率一定、ゼロ金利、死ぬまで働くならば、$T-1=T_1$で、上記の不等式は等号が成り立ち、$B(\infty)=0$、つまり、マクロの家計の金融資産はゼロとなる。

死ぬまで働くのではなく、$T-1>T_1$で、老年期に備えて、若年期に貯蓄する場合には、マクロの家計の金融資産はプラスになる。

(ケース 1-2)　時間選好率がプラスで、

$\beta<1$のとき

$$\sum_{\tau=1}^{T-1}\gamma_\tau=\frac{\gamma}{1-\beta}\sum_{\tau=1}^{T-1}(1-\beta^\tau)=\frac{1}{1-\beta^T}(T-1-\frac{1-\beta^T}{1-\beta})$$

だから、

$$T-1-\frac{T_1}{2}-\sum_{\tau=1}^{T-1}\gamma_\tau=T-1-\frac{T_1}{2}-\frac{T-1}{1-\beta^T}+\frac{1}{1-\beta}$$

βが 1 に近く、$\beta=1-\varepsilon$と書けるときは、

$$\frac{1}{1-\beta}-\frac{T-1}{1-\beta^T}\approx\frac{1}{\varepsilon}-\frac{T-1}{T\varepsilon}=\frac{1}{T\varepsilon}$$

よって、$\varphi(1-\varepsilon,1,T,T_1)>0$

(ケース 1-3)　人口一定、時間選好率ゼロの

近傍の状況

人口一定で$n=0$のとき、$\beta<1$かつ時間選好率$\theta=0,\beta=1$の近傍ならば、

$$B(\infty)>0$$

が成り立つ。

人口一定を仮定したが、連続性から、人口増加率nが 0 に近ければ、上の分析が成り立つ。

(ケース 2)　人口増加率がゼロでないが、時間選好率はゼロで、$r<1,\beta=1$のとき

$$\varphi(1,r,T,T_1)$$
$$=\sum_{\tau=1}^{T_1}r^\tau\tau-(T_1+1)\sum_{\tau=1}^{T-1}r^\tau\frac{\tau}{T}+(T_1+1)\sum_{\tau=T_1+1}^{T-1}r^\tau$$
$$=\frac{T-1-T_1}{T}\sum_{\tau=1}^{T_1}r^\tau\tau+(T_1+1)\sum_{\tau=T_1+1}^{T-1}r^\tau(1-\frac{\tau}{T})\geq 0$$

よって、死ぬまで働く場合は、$T-1=T_1$であり、上の式はゼロ、つまり、$B(\infty)=0$で、マクロの家計の金融資産はゼロとなる。

死ぬまで働くのではなく、若年期に貯蓄して老年期に備える場合は、$T-1>T_1$で上の式はプラス、つまり$B(\infty)>0$で、マクロの家計の金融資産はプラスになる。

(ケース 3)　$\beta<1,r<1$の場合

$$\varphi(\beta,r,T,T_1)$$
$$=\sum_{\tau=1}^{T_1}r^\tau\tau-(T_1+1)\frac{1}{1-\beta^T}\sum_{\tau=1}^{T-1}r^\tau(1-\beta^\tau)+(T_1+1)\sum_{\tau=T_1+1}^{T-1}r^\tau$$

(ケース 3-1)　$\beta=1-\varepsilon$でεが小さい場合

前と同様に、$1-\beta^\tau\approx\tau\varepsilon$だから、

$$\varphi(1-\varepsilon,r,T,T_1)$$
$$=\sum_{\tau=1}^{T_1}r^\tau\tau-\frac{T_1+1}{T}\sum_{\tau=1}^{T-1}r^\tau\tau+(T_1+1)\sum_{\tau=T_1+1}^{T-1}r^\tau\geq 0$$

(ケース 3-2)　さらに一般の場合

等比級数の和の公式を微分して、

$$\sum_{\tau=1}^{T_1}r^\tau\tau=\frac{T_1r^{T_1+2}-(T_1+1)r^{T_1+1}+r}{(1-r)^2}$$
$$=\frac{r(1-T_1r^{T_1})}{1-r}+(\frac{r}{1-r})^2\frac{1-r^{T_1+1}}{1-r}$$

よって、

$$\varphi(\beta,r,T,T_1)$$
$$=\frac{r(1-T_1r^{T_1})}{1-r}+(\frac{r}{1-r})^2\frac{1-r^{T_1+1}}{1-r}$$
$$-\frac{T_1+1}{1-\beta^T}\{\frac{r(1-r^{T-1})}{1-r}-\frac{r\beta(1-r^{T-1}\beta^{T-1})}{1-r\beta}\}$$
$$+(T_1+1)r^{T_1+1}\frac{1-r^{T-1-T_1}}{1-r}$$

この式の符号を決めるのは難しい。しかし、もともと(4-50)、(4-51)で$\beta=0$とおくと、

$$\varphi(0,r,T,T_1)<0$$

また上から、

$$\varphi(1-\varepsilon,r,T,T_1)>0$$

よって連続性から、ある$0<\underline{\beta}<1$があって、

$$\varphi(\beta,r,T,T_1)>0, \underline{\beta}<\beta<1$$

つまり、あるプラスの時間選好率の範囲で、$B(\infty)>0$、すなわちマクロの家計の金融資産はプラスになる。

付録 8. 微分方程式の前向き解・後ろ向き解 (第 5 節)

一般に、微分方程式

$$\frac{dx}{dt}=f(t)x+g(t)$$

の解は、$\tau\geq t$として、

$x(\tau)$を過去で表わすと、

$$x(\tau)=x(t)\exp(\int_t^\tau f(a)da)$$
$$+\exp(\int_t^\tau f(a)da)\int_t^\tau g(b)\exp(-\int_t^b f(a)da)db$$

$x(t)$を将来で表わすと、

$$x(t)=-\int_t^\tau g(b)\exp(-\int_t^b f(a)da)db$$
$$+x(\tau)\exp(-\int_t^\tau f(a)da)$$

付録 9. 積分記号の中の微分 (第 5 節)

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx=\{f(b(t),t)b'(t)-f(a(t),t)a'(t)\}$$
$$+\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$$

を示す。

$$\Delta_h=\int_{a(t+h)}^{b(t+h)} f(x,t+h)dx-\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx$$
$$=\int_{a(t+h)}^{b(t+h)}(f(x,t+h)-f(x,t))dx$$
$$+(\int_{a(t+h)}^{b(t+h)}-\int_{a(t+h)}^{b(t)})f(x,t)dx+(\int_{a(t+h)}^{b(t)}-\int_{a(t)}^{b(t)})f(x,t)dx$$
$$=\int_{a(t+h)}^{b(t+h)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}hdx+\int_{b(t)}^{b(t+h)} f(x,t)dx-\int_{a(t)}^{a(t+h)} f(x,t)dx+o(h)$$
$$=\int_{a(t+h)}^{b(t+h)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}hdx$$
$$+\int_{b(t)}^{b(t)+b'(t)h} f(x,t)dx-\int_{a(t)}^{a(t)+a'(t)h} f(x,t)dx+o(h)$$

よって、

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h}{h}=\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$$
$$+f(b(t),t)b'(t)-f(a(t),t)a'(t)$$

付録 10. ラグランジュ乗数の一般的導き方 (第 2、3、4、5 節)

Eをベクトル空間、fをE上の線形汎関数、

$g(x)=\begin{pmatrix} g_1(x) \\ ... \\ g_m(x)\end{pmatrix}$を$E$から$R^m$の上への線形写像とする。$g(x)=0$なら必ず$f(x)=0$となっているならば、実数$\lambda_i(i=1,...,m)$が存在し、すべての$x\in E$に対し、

$$f(x)=\lambda g(x)=\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$
$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 & ... & \lambda_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1(x) \\ ... \\ g_m(x)\end{pmatrix}$$

実際、gがR^mの上への写像であることから、R^mの標準基底$\{y_1,...,y_m\}$に対し、Eの元

$\{x_1,...,x_m\}$が存在し、

$$g(x_j)=y_j\,(j=1,...,m)$$

$$g_i(x_j)=y_{i,j}=\delta_{i,j}\,(i=1,...,m)$$

となっている。ここで、

$$\delta_{i,j}=0(i\neq j),=1(i=j)$$

任意の $x\in E$ は、

$$x=\sum_{i=1}^{m}g_i(x)x_i+(x-\sum_{i=1}^{m}g_i(x)x_i)$$

と書け、右辺第 2 項は g をほどこすとゼロになる $\mathrm{Ker}\,g=g^{-1}(0)$ に属する。右辺第 1 項はその補ベクトル空間で、商空間 $E/\mathrm{Ker}\,g$ に同型なものに属する。x に f をほどこすと、仮定により、右辺第 2 項に f をほどこしたものはゼロになるので、

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}f(x_i)g_i(x)$$

よって、$\lambda_i=f(x_i)(i=1,...,m)$
とおけば、これがラグランジュ乗数になることが分かる。

もとの条件が、$g_i(x)\geq 0(i=1,...,m)$ なら必ず $f(x)\geq 0$ であるならば、この $\lambda_i\geq 0$ である。

実際、この条件のもとでも、$g(x)=0$ なら必ず $f(x)=0$ となっている。もしそうでないとすれば、ある $x\in E$ が存在して、

$g(x)=0$ かつ $f(x)=\alpha>0$

$\mu<0$ に対し、$g(\mu x)=\mu g(x)=0$ だから、仮定により、$f(\mu x)\geq 0$。ところが、
$f(\mu x)=\mu f(x)=\mu\alpha<0$ となり矛盾である。
よって、前の命題が適用出来、

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)$$

$x=x_j\,(j=1,...,m)$ において、すべての $i=1,...,m$ について $g_i(x)\geq 0$ だから、仮定により、$f(x_j)=\lambda_j\geq 0$。

付録 11. n 次元空間における条件付最大化 (第 2、3、4 節)

n 次元空間を $E=R^n$ とし、
$f,g_i(i=1,...,m)$ を E 上で定義された微分可能な実数値関数とし、b_i をパラメータとして、制約条件の集合
$M=\{x:g_i(x)-b_i=0,i=1,...,m\}$ の上で、目的関数 $f(x)$ の最大化を図る。$x=x_0$ が、

$\max f(x)$

$g_i(x)-b_i=0(i=1,...,m)$

の解であるとし、$x_0\in M$ における M の接超平面を T_{x_0} とする。x_0 の近傍 x_0+h で、$h\in T_{x_0}$ に対し、微分の定義から、線形汎関数 $f'(x_0),g_i'(x_0)$ が存在し、

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+o(\|h\|)$$
$$g_i(x_0+h)-g_i(x_0)=g_i'(x_0)h+o(\|h\|),i=1,...,m$$

ここで、$g'(x_0)=\begin{pmatrix}g_1'(x_0)\\ \dots\\ g_m'(x_0)\end{pmatrix}:E\to R^m$

は R^m の上への線形写像であるとし、このとき x_0 は正常点であると言う。
超接平面 T_{x_0} は制約条件の集合 M と位相同型であるから、$g_i(x_0+h)\approx g_i(x_0),i=1,...,m$ であり、最大値をとっているから、
$f(x_0+h)\approx f(x_0)$ である。よって、
$h\in T_{x_0}$ に対し、$g_i'(x_0)h=0,i=1,...,m$ なら必ず $f'(x_0)h=0$ となっている。従って、付録 10 のように、ラグランジュ乗数 $\lambda_i,i=1,...,m$ が存在し、すべての $h\in T_{x_0}$ に対し、

$$f'(x_0)h=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i'(x_0)h$$

これは、ラグランジアンを

$$F(x)=f(x)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(g_i(x)-b_i)$$

とおいたとき、$F'(x_0)h=0$ を意味する。

パラメータ $b_i,i=1,...,m$ を b_i+k_i に動かす場合は、$g_i(x,b_i)=g_i(x)-b_i$ とおき、最大値

を与える $x_0 = x_0(b)$ として、微分の定義の式を書くと、

$$g_i(x_0(b+k)), b_i + k_i) - g_i(x_0(b), b_i)$$
$$= g_{i,x}(x_0(b), b_i)x_0'(b)k + g_{i,b}(x_0(b), b_i) + o(\|k\|)$$

$$g_i(x_0(b+k)) - (b_i + k_i) - (g_i(x_0(b)) - b_i)$$
$$= g_i'(x_0(b))x_0'(b)k - k_i + o(\|k\|)$$

制約条件の集合上で左辺はゼロ、右辺の微分もゼロだから、

$$g_i'(x_0(b))x_0'(b)k = k_i, i = 1,...,m$$

一方、

$$f(x_0(b+k)) - f(x_0(b)) = f'(x_0(b))x_0'(b)k + o(\|k\|)$$

ラグランジュ乗数の式で $h = x_0'(b)k$ にとれば、

$$f'(x_0(b))x_0'(b)k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i'(x_0(b))x_0'(b)k$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i k_i$$

これは、パラメータ b_i が動いたとき、最大値 $f(x_0)$ がどう動くかは、ラグランジアンを

$$F(x,b) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(x) - b_i)$$

と書き、b で偏微分すればよいことを示す。

$$F_b(x_0, b)k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i k_i$$

これは包絡線定理と呼ばれる。

線形汎関数として、$\lambda = (\lambda_1 ... \lambda_m)$ は、

$$f'(x_0(b))x_0'(b) = \lambda$$

であるから、ラグランジュ乗数 λ は、制約条件のパラメータが動いたときに目的関数がどれほど動くかを示している。

パラメータが目的関数、制約条件に $f(x,b)$、$g_i(x,b) = 0$ の形で入っている場合も、パラメータ変化による目的関数の最大値への影響は、ラグランジアンを偏微分したものになる。

$$F_b(x,b)k = f_b(x,b)k - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_{ib}(x,b)k$$

付録 12. 関数空間における条件付最大化

(第 5 節)

2乗可積分な関数 $x:[0,T] \to R$ の全体のつくる関数空間を $E = L^2(0,T:R^n)$ とし、$f, g_i (i = 1,...,m)$ を E 上で定義された、フレッシェ微分可能な実数値汎関数とし、b_i を実数パラメータとして、制約条件の集合

$$M = \{x \in E : g_i(x) - b_i = 0, i = 1,...,m\}$$ の

上で、目的関数 $f(x)$ の最大化を図る。本文で扱うのは、$f(x) = \int_0^T u(x(t))dt$

$$g(x) = \int_0^T v(x(t))dt$$

のような積分タイプであり、等周問題と言われる。$x = x_0$ が、この最大化問題

$$\max f(x)$$
$$g_i(x) - b_i = 0 (i = 1,...,m)$$

の解であるとし、$x_0 \in M$ における M の接超平面を T_{x_0} とする。

$$T_{x_0} = \{h \in E : g'(x_0)h = 0\}$$

x_0 の近傍 $x_0 + h$ で、$h \in T_{x_0}$ に対し、微分の定義から、線形汎関数

$f'(x_0), g_i'(x_0) : E \to R$ が存在し、

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(\|h\|)$$
$$g_i(x_0 + h) - g_i(x_0) = g_i'(x_0)h + o(\|h\|), i = 1,...,m$$

ここで、$g'(x_0) = \begin{pmatrix} g_1'(x_0) \\ ... \\ g_m'(x_0) \end{pmatrix} : E \to R^m$

は R^m の上への線形写像であるとし、このとき x_0 は正常点であると言う。

超接平面 T_{x_0} は制約条件の集合 M と位相同型であるから、$g_i(x_0 + h) \approx g_i(x_0), i = 1,...,m$ であり、最大値をとっているから、

$f(x_0+h) \approx f(x_0)$ である。よって、$h \in T_{x_0}$ に対し、$g_i'(x_0)h=0, i=1,...,m$ なら必ず $f'(x_0)h=0$ となっている。従って、付録10のように、ラグランジュ乗数 $\lambda_i, i=1,...,m$ が存在し、すべての $h \in T_{x_0}$ に対し、

$$f'(x_0)h=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i'(x_0)h$$

これは、ラグランジアンを

$$F(x)=f(x)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(g_i(x)-b_i)$$

とおいたとき、$F'(x_0)h=0$ を意味する。

パラメータ $b_i, i=1,...,m$ を b_i+k_i に動かす場合は、n 次元空間の場合とまったく同様にして、

$$f'(x_0(b))x_0'(b)k=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i'(x_0(b))x_0'(b)k$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i k_i$$

これは、パラメータ b_i が動いたとき、最大値 $f(x_0)$ がどう動くかは、ラグランジアンを

$$F(x,b)=f(x)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(g_i(x)-b_i)$$

と書き、b で偏微分すればよいことを示す。

$$F_b(x_0,b)k=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i k_i$$

これも包絡線定理と呼ぶ。
線形汎関数として、$\lambda=(\lambda_1...\lambda_m)$ は、

$$f'(x_0(b))x_0'(b)=\lambda$$

であるから、ラグランジュ乗数 λ は、制約条件のパラメータが動いたときに目的関数がどれほど動くかを示している。

パラメータが目的関数、制約条件に $f(x,b)$、$g_i(x,b)=0$ の形で入っている場合も、パラメータ変化による目的関数の最大値への影響は、ラグランジアンを偏微分したものになる。

$$F_b(x,b)k=f_b(x,b)k-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(g_{ib}(x,b)k$$

付録 13. 連続時間の場合の横断条件の導出 (第 5 節)

生涯労働所得が収束するための条件(5-34)は、

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \lambda(t)dt=\int_0^\infty \lambda(t)dt<\infty$$

ここで、$\lambda(t)>0$ であり、さらに一様連続であるとすると、横断条件

$$\lim_{t\to\infty}\lambda(t)=0$$

が出る。もしそうでないとすると、ある $\varepsilon_0>0$ と $t_1<t_2<...<t_n<...\to\infty$ が存在して、

$$\lambda(t_n)\ge 2\varepsilon_0, \forall n$$

他方、一様連続であることから、この ε_0 に対して、$\delta_0>0$ が存在して、

$\forall n$, $\forall t\in[t_n-\dfrac{\delta_0}{2}, t_n+\dfrac{\delta_0}{2}]$ について、

$$|\lambda(t)-\lambda(t_n)|<\varepsilon_0$$

すなわち、

$$\lambda(t)>\lambda(t_n)-\varepsilon_0\ge\varepsilon_0$$

よって、

$$\forall n, \quad \int_{t_n-\delta_0/2}^{t_n+\delta_0/2}\lambda(t)dt \ge \delta_0\varepsilon_0$$

ここで、必要ならば部分列をとって、区間

$$[t_n-\frac{\delta_0}{2}, t_n+\frac{\delta_0}{2}], n=1,2,...$$

が区間 $[0,\infty[$ の中で、重ならないようにすることが出来る。$n=1$ については、

$t_1-\dfrac{\delta_0}{2}>0$ に選び、t_n まで選んだとき、t_{n+1} は、

$t_n+\dfrac{\delta_0}{2}<t_{n+1}-\dfrac{\delta_0}{2}$ となるように選べばよい。

このとき、

$$\int_0^\infty \lambda(t)dt>\sum_{n=1}^{N}\int_{t_n-\delta_0/2}^{t_n+\delta_0/2}\lambda(t)dt\ge N\delta_0\varepsilon_0$$

$N\to\infty$ のとき、右辺、従って左辺も無限大に発散する。これは矛盾。よって、横断条件が成り立つ。

参考文献

1. 論文

Balasko,Yves, Karl Shell,
The Overlapping-Generations Model, I: The Case of Pure Exchange without Money, *Journal of Economic Theory,* 23, 281-306, 1980. II: … with Money, 24, 112-142, 1981. III:The Case of Log-Linear Utility Functions, 24, 143-152, 1981.

Blanchard, Olivier J.,
Debt, Deficits, and Finite Horizons, *Journal of Political Economy,* 93(2) 223-247, 1985.

Caballero, Ricardo J., Emmanuel Farhi, Mohamad L. Hammour,
Speculative Growth: Hints from the U.S. Economy, *The American Economic Review,* 96(4) 1159-1192, 2006.

Cass, David,
On Capital Overaccumulation in the Aggregative, Neoclassical Model of Economic Growth: A Complete Characterization, *Journal of Economic Theory*, 4, 200-223, 1972.

Diamond, Peter A.,
National Debt in a Neoclassical Growth Model, *The American Economic Review*, 55(5), 1126-1150, 1965.

Farhi, Emmanuel, Jean Tirole,
Bubbly Liquidity, *Review of Economic Studies,* 79(2) 678-706, 2012.

Harrison, Michael, David M. Kreps,
Speculative Investor Behavior in a Stock Market with Heterogeneous Expectations, *Quarterly Journal of Economics,* 92, 323-336, 1978.

Kotlikoff, L. J., Lawrence H. Summers,
The Role of Intergenerational Transfers in Aggregate Capital Accumulation, *Journal of Political Economy,* 89(4), 706-732, 1981.

Tirole, Jean,
On the Possibility of Speculation under Rational Expectations, *Econometrica*, 55(5) 1163-1181, 1982.

Tirole, Jean,
Asset Bubbles and Overlapping Generations, *Econometrica*, 53(6) 1499-1528, 1985.

2. 単行本

Arrow, Kenneth J., F. H. Hahn,
General Competitive Analysis, Holden Day, 1971.

Auerbach, Alan J., Laurence J. Kotlikoff,
Dynamic fiscal policy, Cambridge University Press, 1987.

Balasko, Yves,
General Equilibrium Theory of Value, Princeton University Press, 2011.

Blanchard, Olivier Jean, Stanley Fischer,
Lectures on Macroeconomics, The MIT Press, 1989.

Bensoussan, Alain,
Perturbation Methods in Optimal Control, John Wiley & Sons, 1988.

Bewley, Truman F.,
General Equilibrium, Overlapping Generations Models, and Optimal Growth Theory, Harvard University Press, 2007.

Léonard, Daniel, Ngo Van Long,
Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics, Cambridge University Press, 1992.

Ljungqvist, Lars, Thomas J. Sargent,
Recursive Macroeconomic Theory, Second Edition, The MIT Press, 2004.

Люстерник, Л. А., В. И. Соболев,
Элементы Функционального Анализа, Наука, 1965. (リュステルニク、ソボレフ『関数解析の基礎』、ナウカ)

Sargent, Thomas J.,

Dynamic Macroeconomic Theory, Harvard University Press, 1987.

Tvede, Mich,

Overlapping Generations Economies, Palgrave Macmillan, 2010.

Wickens, Michael,

Macroeconomic Theory, A Dynamic General Equilibrium Approach, Princeton University Press, 2008.

Zeidler, Eberhard,

Nonlinear Functional Analysis and Its Applications III, Variational Methods and Optimization, Springer-Verlag, 1985.