官民もたれ合い経済の長期低迷
－簡単な２部門モデルによる理論分析－

小 島 祥 一

目　次

はじめに

日本経済は、1990年代初めのバブル崩壊以降、長期にわたって低迷を続けた。だが2000年代前半に至り、中国の急速な成長、アメリカの強い需要に刺激され、やっと低迷から脱出し、新たな成長軌道に乗った。

2001年に「改革なくして成長なし」のキャッチフレーズで登場した小泉首相は、今や改革の成果が実りつつある、と自信をみせ、2006年の自民党総裁任期の満了までに、小さな政府を目指し、さらに公的部門の改革を推進する考えだ。

今回の長期低迷からの脱出は、民間企業のリストラによる経営改革とさらなる技術革新が積み重ねられたところに、中国、アメリカの需要刺激が加えられて可能になったものだ。首相の言うように、公的部門の改革が進み小さな政府になり、民間部門は重しがとれて解放されたから、という訳ではない。

だが首相が、「これまでの景気対策は効果がなかった。だから不況でも、景気対策は打たない。」と明言したことで、企業が政府に頼らず、自前で立ち上がる気になったことは、確かだ。この意味で、小泉首相の公的部門の改革は、新たな成長軌道に乗るのに貢献したといえる。

つまり今回の長期低迷からの脱出は、中国、アメリカからの外的刺激という需要側の要因と、企業の経営改革、技術革新や、小さな政府に向けた公的部門の改革という供給側の要因の双方が合わさって可能になった訳だ。

長期低迷がそもそもなぜ生じたか、についても、まず、バブル期に持続不可能な成長期待から需要が拡大し、ついでそれが崩壊したという需要側の要因があげられる。だがそれとともに、不良債権の巨大化などにより、情報の非対称性が高まって信用システムが崩壊し、民間部門が非効率化したことや、公的部門が肥大化して民間部門の活動を制約し、経済全体が硬直化したことなどの供給側の要因も考えられる。

本論文では、このような成長から長期低迷、それからの脱出と新たな成長という、日本経済のたどった道を、簡単な理論モデルで説明してみたい。

マクロ経済学では、長期的な動きは経済成長論、経済発展論において、供給側の要因を主と

して説明し、短期的な動きは景気循環論や安定化政策論において、需要側の要因を主として説明してきた。だが、長期低迷という現象は、短期的な不況が長期的に続いたことを示し、これまでの学問の仕分けを横断的にとらえるような思考方法が必要になる。

ここでは、長期的な経済の動きを供給側の要因により分析する経済成長論をベースにして、長期低迷という現象も取り入れられるような理論モデルを作ってみたい。

モデルとしては、民間部門と公的部門の２部門を含み、その動学的経路がたどれる、最小限のものを考える。それは、各時点で需要と供給か均衡し、資本蓄積により経済が動学的に動いていく。需要は供給側の要因から決まるとするので、供給側中心のモデルになる。ただし、供給側の非効率要因を取り入れ、経済が必ずしも成長するとは限らず、循環したり衰退したりする可能性も持たせる。経済成長モデルと一般均衡景気循環モデルの両面を持つようなモデルだ。数学的には、２次元の線形微分方程式に帰着し、よく知られた結果が使える。

以下、第１節では、日本経済がこの25年間たどった経路を図示し、前半の成長、後半の空回りと脱出の事実を、通常なされる解釈に従いながら確認し、これを模式化する。

第２節では、日本経済の長期的な成長と低迷を説明するためには、通常の経済成長モデルと異なり、民間部門、公的部門が必ずしも比例的に拡大しない２部門モデルが必要なことを示す。そして、資本ストックが部門固有だが、その一部が他部門に相互に漏れ出すモデルを本論文のベースにすることを述べる。

第３節では、公的部門が肥大化して非効率性が高まり、経済全体も非効率性を高めることをモデルに取り入れ、長期低迷が起こるかどうか、構造を表わすパラメータによってケース分けし、分析する。

第４節では、民間部門が信用システムの崩壊などで非効率性が高まり、経済全体も非効率性を高めることをモデルに取り入れ、長期低迷が起こるかどうか、構造を表わすパラメータによってケース分けし、分析する。

第５節では、模式化した日本経済の経路を構造変化により説明するため、以上でみた構造パラメータが階段状で変化する場合に、各ケースをつなぎ合わせて考える。

最後に、本論文で何が分かったのか、今後の分析の方向はどうか、について述べる。

１．過去25年間の日本の民需、公需、外需のたどった経路

⑴　11年拡大

過去25年間の日本経済の拡大と長期低迷の様子は、実質GDP 統計を構成する、民間需要（民需）、公的需要（公需）、海外需要（外需）に動きを分解すると、よく分かる。図１は、1980年上期から2005年上期まで半期ベースで、横軸に民需、縦軸に公需をとってプロットした散布図である。図２は、同じく、横軸に民需、縦軸に外需をとったものだ。

図１によれば、1980年上期から1991年上期までの約11年は、大きく見れば成長の期間だ。この期間においては、民需が伸び、公需も緩やかに伸びたので、散布図は右上がりの直線に近い経路をたどっている。

詳しく見ると、1980年上期から1983年上期にかけての時期は、第２次石油危機による不況で、民需の伸びは低く、かろうじて公需が伸びて下支えした。

だが、1984年以降は、財政再建が本格化し、公需は伸びず、かわって図２が示すように、1983年下期から1985年上期にかけて、レーガノミクスのもとでアメリカの輸入が拡大し、外需が伸び、民需が刺激され、景気回復につながった。供給側の要因として、日本企業は省エネルギー、省資源の技術革新により国際競争力を強

化していたことが、アメリカへの輸出増につながった。

だがその結果、日本の黒字、アメリカの赤字拡大による経常収支不均衡が世界経済の不安定要因となり、プラザ合意により円高が進んだ。日本の外需は減少傾向となり、1985年下期か

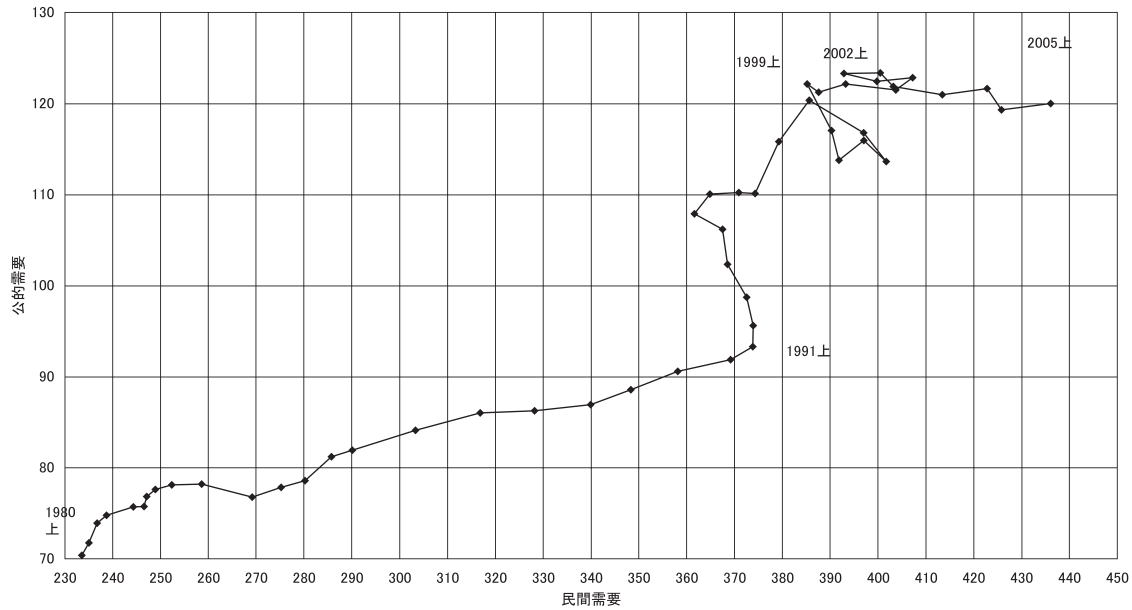

図１　民需・公需図
（実質GDP1995年基準ベース、季節調整済、年率、兆円、1980上－2005年上）

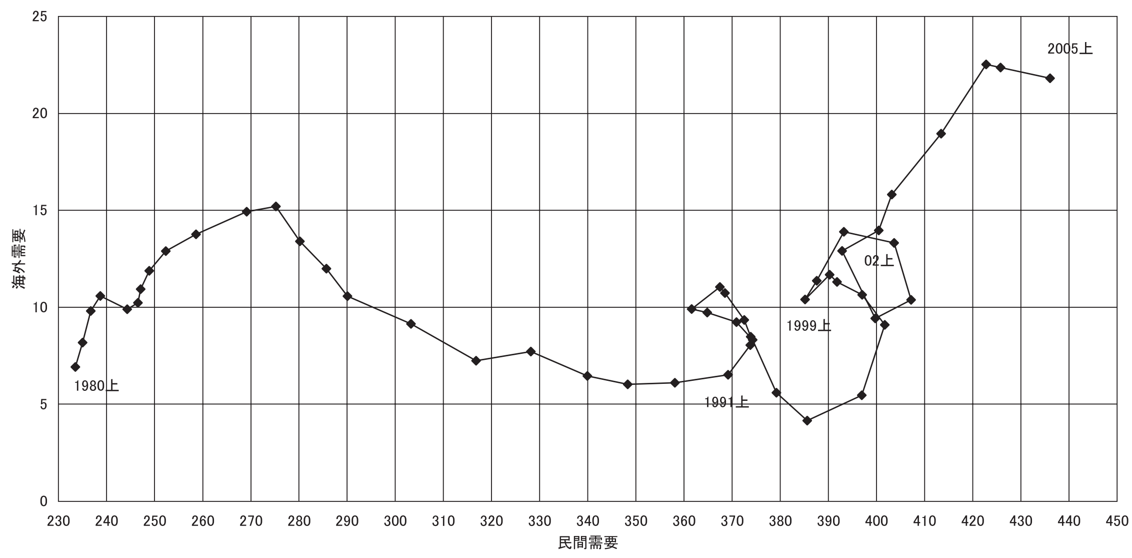

図２　民需・外需図
（実質GDP1995年基準ベース、季節調整済、年率、兆円、1980上－2005年上）

ら1986年下期には円高不況となった。

しかし日本経済は、円高はさらなる技術革新で克服し、経常収支黒字縮小のための内需拡大策としてとられた超低金利、財政支出拡大、減税、規制緩和に刺激されて、1986年下期以降、民需が大きく拡大を続けた。この間、外需は減少を続けた。まさに内需主導型の成長だったのだ。しかし、超低金利のもとで急拡大した設備投資は、将来に膨大な過剰生産能力を残すことになった。しかも、超低金利が長期化し、土地、株式投機に膨大な資金が注ぎ込まれ、資産価格が急騰し、バブルが拡大した。資産価格が経済のファンダメンタルズを超えて上昇するバブルは、いずれ崩壊しなければならないものだった。

⑵ 12年低迷

図１によれば、1991年下期から2003年上期までの約12年間は、一目瞭然のように、低迷の期間だ。この期間においては、民需が減少を続ける間、公需が拡大し、民需が拡大すると公需が減少ないし横ばいになる、という動きを示した。図２によれば、この間、外需は増加、減少を繰り返し、全体としては民需を刺激するものではなかった。

（８年時計方向空回り）

これをより詳しく見ると、1991年下期から1995年上期にかけての時期は、民需は減少傾向にあり、ならしてみれば横ばいだった。外需も増加して減少したので、ならしてみれば横ばいだった。この間増加したのは、景気対策による公需だけだったことになる。

1995年下期から1997年上期にかけて、民需は拡大し、景気回復となった。これは景気対策の効果や当時のＩＴブームによるものであり、財政構造改革法のもとで、公需は減少に転じた。外需は再び増加して減少し、ならしてみれば横ばいだった。

消費税率の引き上げ、財政構造改革法による歳出抑制、拓銀、山一破綻による金融パニックのため、民需は1997年下期から1999年上期まで減少した。いわゆる橋龍不況だ。財政構造改革法は凍結され、公需は再び増加に転じた。外需の動きは小さかった。

以上の1991年下期から1999年上期までの約８年間の民需と公需の動きを図１で見ると、時計方向に空回りしたように見える。民需が減れば公需が増えるが、民需が増えると公需が減るのでそうなるのだ。

（４年反時計方向空回り）

これに対して、1999年下期から2003年上期の約４年間は、民需と公需の動きを図１で見ると、反時計方向に空回りしたように見える。実際は８の字のような複雑な動きだが、原因は2001年上期と2002年下期の公需の大小関係だけによるものなので、簡単化のため、反時計回りと見なそう。

これは民需が、1999年下期から回復したものの、2001年下期から減少し、2002年下期、2003年上期と再び回復して、2000年下期の位置に戻る動きをしたためだ。これは、企業のリストラなどの経営改革が進展し、より高度な技術革新が進み、企業収益が増加に転じ、設備投資が増え始めたことが大きい。この間、公需は、小泉首相の「景気対策は効かない。」という路線により、小さな増加、減少を繰り返しただけだった。図２によれば、外需も増加、減少を繰り返していた。

⑶ ２年成長

2003年下期から最近時点の2005年上期までの約２年間は、図１によれば、公需が横ばいを続ける一方、民需が順調な伸びを示し、これまでの空回りから完全に脱出し、成長している。

これは、図２が示すように、外需が大きな伸びとなって民需を刺激したことが大きい。中国、アメリカの強い需要が続き、日本企業は経営改

革や技術革新が進んで国際競争力をつけていたので、輸出拡大が可能となった。

⑷　民需、公需の動きの模式化

以上のように、過去25年間の日本経済の動きは、大きく見れば、民需と公需の動きに集約される。外需は、第２次石油危機からの脱出、今回の空回りからの脱出において、民需に対する外的刺激として重要な役割を果たしたが、その他の期間においては、増加、減少を繰り返し、ならしてみれば中立的だったからだ。

過去25年間の民需と公需の動きは、以上見てきたように、11年成長、８年時計方向空回り、４年反時計方向空回り、２年成長、と模式化することが出来る。これを図示すると、図３のようになる。

この模式化した民需、公需の動きは、通常の経済成長論にあるような長期的傾向としての成長に加えて、通常、短期的景気変動とみなされてきた空回りが、長期的傾向として起こり得ることを示している。さらに、今回の長期低迷では、通常、途上国の経済発展論で議論される、長期的傾向としての衰退すら、日本経済に起こり得るのではないかと危惧された。

以下では、この模式化された民需、公需の動きを説明する、最小限の規模の理論モデルを考えよう。上で見たように、成長から長期低迷、それからの脱出と新たな成長、という日本経済

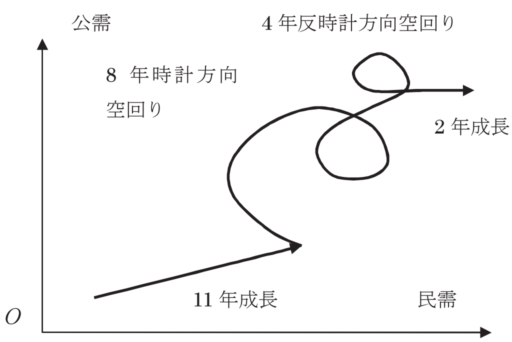

図３　模式化した民需・公需図

のたどった道は、需要側の要因、供給側の要因の双方が働いた結果だが、前述のように、本論文では供給側の要因に絞って考える。このため、模式化された民需、公需という需要側の動きは、以下では民間部門、公的部門の生産という、供給側の動きを反映するものと解釈し直すことになる。

２．民間部門、公的部門の２部門動学モデル

⑴　簡単な動学モデル：資本ストックが完全に可塑的な場合

民間部門、公的部門の２部門モデルでもっとも良く知られているのは、サミュエルソンの公共財理論で定式化されたものだ。そこでは、私的財、公共財の２財があり、社会的な生産可能性曲線が与えられている。ここで２つの家計が、互いに相手の効用水準を所与として、自らの効用を最大化しようとする。このとき、公共財供給のパレート最適条件は、各個人の効用についての限界代替率の和が、社会的な生産の限界転換率に等しくなることである。

これは静学一般均衡モデルだが、２部門の動学一般均衡モデルで良く知られているのは、宇沢の消費財、資本財からなる２部門経済成長モデルだ。ここにおいては、生産の静学的な限界条件が成り立つとし、貯蓄率を所与として、社会的な貯蓄＝投資財への需要が決まり、資本財、消費財の需給均衡と完全雇用の条件から生産物価格、要素価格が決まる。こうして資本蓄積がなされ、静学的に一般均衡にある経済の動学的経路が決まり、両部門とも成長する。

本論文では、民間部門、公的部門の２部門を持ち、静学的には一般均衡にあり、資本蓄積を行う動学モデルを考える。各部門が非効率的な行動をとる場合を含め、分析の対象に出来るような、簡単なモデルを探してみたい。

まずとっかかりとしては、民間部門の生産を

xとし、公的部門の生産をyとするとき、その時間的変化が、

(1) $\dot{x} = Ax \qquad \dot{y} = Bx$

となる場合を考えよう。ここにドットは、時間tに関する微分($\dot{x} = dx/dt$)を表わす。A、Bは正の定数であり、Aは民間部門の成長係数、Bは公的部門の規模係数と呼ぶことにする。

式(1)の意味するところは、民間部門の生産規模が大きい程その増え方は大きく、公的部門は、民間部門の生産規模が大きい程その増え方は大きい、ということだ。

極めて簡単なモデルだが、その背後にある経済構造は、次のように考えられる。

社会全体として入手可能な資本ストックKがあり、それは完全に可塑的であって民間部門、公的部門のいずれにも使えるとする。民間部門、公的部門は、それぞれK_1、K_2の資本ストックを用いて、固定係数で私的財、公共財の生産を行う。

$$x = a_1K_1 \qquad y = a_2K_2 \qquad K_1 + K_2 = K$$

民間財と公共財の相対価格は一定で1とし、事実上1財モデルとして考えてよいとする。

民間部門の生産は、すべて民間部門の労働者の所得になり、公的部門の生産は、すべて公的部門の労働者の所得になるとする。すると、GDP＝生産＝所得は、

$$Y = x + y = a_1K_1 + a_2K_2$$

労働者は税率τによりτYだけ納税し、可処分所得$(1-\tau)Y$を私的消費Cと資本投資Iに支出する。投資率＝貯蓄率をsとする。つまり、私的財、公共財への選好を表わす社会的厚生関数の役割は税率τで代用し、現在の消費と将来の消費つまり投資への選好を表わす時間選好関数の役割は貯蓄率sで代用する。

公的部門は、税収τYのうちから、公的消費G_C、公共投資G_Iを行う。公共投資の割合をlとすれば、

$$G_C = (1-l)\tau Y \qquad G_I = l\tau Y$$

私的消費、投資は民間財xへの需要に向かうとすれば、私的財の需要、供給の均衡条件は、

$$x = C + I = (1-\tau)Y$$

公的消費、公共投資は公共財yへの需要に向かうとすれば、公共財の需要、供給の均衡条件は、

$$y = G_C + G_I = \tau Y$$

よって、GDP＝支出の式は、

$$Y = C + I + G_C + G_I$$

民間財、公共財の生産の比率は、

$$\frac{y}{x} = \frac{\tau}{1-\tau}$$

経済は、民間部門の生産xを横軸、公的部門の生産yを縦軸であらわせば、右上がりの直線の上にくる。生産可能性曲線は、

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{a_2} = K$$

であり、均衡点は、これら2つの直線の交点として決まり、資本ストックの配分も次のように決まる。

$$\frac{K_1}{K} = \frac{a_2(1-\tau)}{a_1\tau + a_2(1-\tau)}$$

$$\frac{K_2}{K} = \frac{a_1\tau}{a_1\tau + a_2(1-\tau)}$$

資本蓄積の方程式は、

$$\dot{K} = I = s(1-\tau)Y = sx.$$

よって、

$$\dot{x} = a_1\dot{K}_1 = \frac{a_1a_2(1-\tau)}{a_1\tau + a_2(1-\tau)}sx$$

これは、$\dot{x} = Ax$ の形をしている。
また、

$$\dot{y} = \frac{\tau}{1-\tau}\dot{x} = \frac{a_1a_2\tau}{a_1\tau + a_2(1-\tau)}sx$$

だから、$\dot{y} = Bx$ の形をしている。

この動学的経路を数学的に表わしておこう。

時間は、$t \geq 0$ とし、初期条件を

$$x(0) = x_0 \geq 0、y(0) = y_0 \geq 0$$

とすると、微分方程式(1)の解は、

$$x = c_1e^{At}$$
$$y = Bc_1e^{At}/A + c_2 = Bx/A + c_2$$

となる。ここで、$c_1 = x_0$、$c_2 = y_0 - Bx_0/A.$
よって、民間部門は成長率 A で成長し、公的部門は民間部門と、傾き B/A の線形の関係で成長する。

この結果を図示すると、図４のようになる。

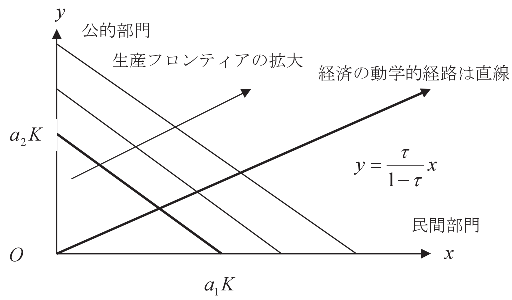

図４　簡単な動学モデル:資本ストックが完全に可塑的な場合

第１節でみた日本経済の拡大局面には当てはまりそうだが、長期低迷は説明出来ない。長期低迷のように、経済の動学的経路が直線上から乖離する可能性を探るためには、背後にある経済構造を何らか修正する必要がある。

上のモデルでは、資本ストックが完全に可塑的だったので、経済はあたかも１部門のように動いた。民間部門、公的部門が比例的に拡大しない状況を作り出すため、これとは正反対に、資本ストックが不可塑的で、それぞれの部門に固有だとしよう。

そうすると、各部門は次のような動学に従う。

(2)　$\dot{x} = Ax \qquad \dot{y} = Dy$

ここで、定数 D は、公的部門が大きい程、公的部門が拡大することを示すので、公的部門の自己増殖係数と呼ぼう。

このようになるのは、上のモデルと異なり、各部門の資本ストックが所与となるので、各部門の生産、GDP、民間財、公共財への需要が決まってしまうためだ。特に、民間財、公共財への需要の配分を決める税率 τ は、GDP に占める各部門のシェアとして、

$$\tau = \frac{a_2K_2}{Y},\quad 1-\tau = \frac{a_1K_1}{Y}$$

と内生的に決まる。つまり、民間財も公共財も

(2)　簡単な動学モデル：資本ストックが部門固有の場合

上にみた簡単な民間部門、公的部門の２部門モデルにおいては、経済は比例的に拡大する。

供給しただけ需要される、という意味で、供給側主体のモデルを考えていることになる。
各部門の資本蓄積は、

$$\dot{K}_1 = I = s(1-\tau)Y = sa_1K_1$$
$$\dot{K}_2 = G_I = l\tau Y = la_2K_2$$

で表わされる。従って、各部門の生産の動学は、

$$\dot{x} = a_1\dot{K}_1 = sa_1x \qquad \dot{y} = a_2\dot{K}_2 = la_2y$$

となり、上記⑵式の形になる。

このモデルでは、各部門は一般に異なる成長率で成長するが、それ以上の複雑な動きがない。

⑶　簡単な動学モデル：部門固有資本ストックの一部が他部門に漏れ出す場合

そこで、民間部門、公的部門の成長が独立でなく、相互連関するように、上のモデルを修正する。具体的には、各部門の資本ストックが一部可塑的であり、他部門に漏れ出すとしよう。そうすると、各部門の生産の動学は、

$$(3) \quad \dot{x} = Ax + Cy \qquad \dot{y} = Bx + Dy$$

となる。

すでに、A は民間部門の成長係数、B は公的部門の規模係数、D は公的部門の自己増殖係数と呼んだが、C は公的部門による民間部門の刺激係数と呼ぼう。

こうなるのは、上のモデルにおいて、民間部門の資本ストックの一部 mK_1 が公的部門の資本ストックに漏れ出し、公的部門の資本ストックの一部 nK_2 が民間部門の資本ストックに漏れ出すので、資本蓄積の方程式が、

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{K}_1 &= (sa_1 - m)K_1 + nK_2 \\ \dot{K}_2 &= mK_1 + (la_2 - n)K_2 \end{aligned}$$

となるためだ。各部門の生産の動学は、

$$\dot{x} = a_1\dot{K}_1 = (sa_1 - m)x + na_1y / a_2$$
$$\dot{y} = a_2\dot{K}_2 = ma_2x / a_1 + (la_2 - n)y$$

となり、

$$A = sa_1 - m,\ B = ma_2 / a_1$$
$$C = na_1 / a_2,\ D = la_2 - n$$

とおけば、上記⑶式の形になる。各部門の資本ストックの漏れ出しは、プラスだが、自部門の投資よりは少ないとし、A、B、C、D はプラスだとする。

式⑶の係数の行列式は、

$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = sla_1a_2 - nsa_1 - mla_2$$

であり、漏れ出しを表わす係数 m、n が小さければ符号はプラスだが、大きいと符号がマイナスにもなり得る。

次に各部門の生産の動学的経路を求めよう。これは２次元線形微分方程式であり、その解は付録２により、c_1、c_2 を初期条件で定まる定数として、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix}e^{\lambda_1 t} + c_2\begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{pmatrix}e^{\lambda_2 t}$$

となる。ここで λ_1、λ_2 は、特性方程式

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & C \\ B & D-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

の根であり、ここでは異なるとしている。B、C がプラスなので、これらは実根になる。
この動学的経路は、上の行列式の符号がプラスの場合は、図５のようになり、数学的には結節点のケースになっている。

この図においては、民間部門、公的部門とも、内部に生存部門を含み、資本ストックがそこに

漏れ出すため、資本ストックが一定規模以下、生産が一定規模以下になると、経済は衰退する、と考えている。資本ストックが一定規模以上、生産が一定規模以上のときに、経済は成長するのだ。このことを次に説明しよう。

⑷　資本ストックの生存部門への漏れ出し

これまでのモデルでは、民間部門、公的部門とも、ゼロから資本蓄積が可能だった。だが実際には、開発経済学で考えられているように、資本蓄積が低い水準では、それが生存部門に向けられて消耗し、資本蓄積にならない。資本蓄積が一定水準以上になって、初めて経済は成長する。

これをモデルの上で考えると、民間部門にも公的部門にも、その一部として生存部門を含んでおり、資本ストックの一部はそこに漏れ出し、生産に使われた後、消耗され、蓄積されないことになる。これら生存部門の生産は、民間消費、公的消費にあてられるとする。資本ストックが生存部門の規模にも達しない場合は、将来の資本ストックがその分毀損されると考える。資本ストックが生存部門の規模を上回って初めて、

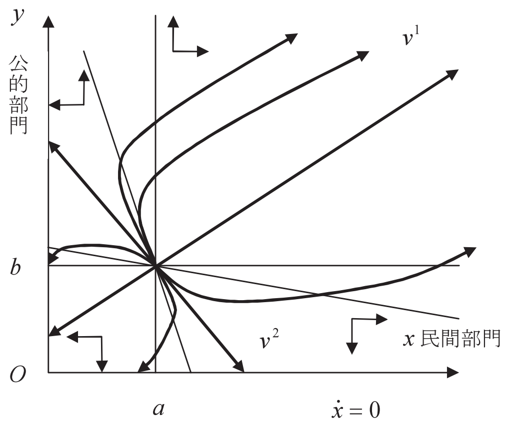

図５　簡単な動学モデルの位相図：部門固有資本ストックで、相互に漏れ出しがある場合

資本蓄積が起こる。

このような場合は、資本ストックや生産をゼロから測るのでなく、生存部門の規模を上回る分を測るのと同じになることが分かる。従って、位相図を描くときは、ゼロを原点にするのでなく、生存部門の一定規模を示す点を原点にすることになる。

これをモデル上で詳しくみれば、付録1のようになる。

３．公的部門が経済全体を非効率にする場合

⑴　公的部門の非効率性の考え方

公的部門はそれ自身の論理により拡張を始め、資源を過度に吸収し、民間部門を効率的にするのでなく、足かせとなって民間部門をかえって非効率にし、経済全体を非効率にすることがあり得る。

Olson は、利益グループが既得権益を守るため、自らに有利な政策を政府にとらせ、経済を硬直化させる、とした。また Niskanen は、官僚が予算最大化を図るため、公的部門は適正規模を超えて肥大化する、とした。

このような政府の規模と経済パフォーマンスの関係について、Mueller は、Public Choice III で多くの理論的、実証的分析をサーベイしている。これによれば、政府が経済に非効率性をもたらすという主張は、課税による厚生の損失など、静学的な分析に基づくものが多い。その中で Peden は、戦前・戦後のアメリカのデータを分析し、政府の規模と経済の生産性には、動学的に、逆U字型の関係があることを示した。政府の規模が小さいとインフラストラクチャーが不足して経済の生産性は低いが、政府の規模が拡大するとインフラストラクチャーが整備されて経済の生産性は上昇する。だが政府の規模が拡大し過ぎると、高い租税負担や政府によるクラウディング･アウトにより、経済の

生産性は再び低下するというものだ。

これらは、政府という官僚機構が非効率性を生み出す場合だが、独占企業という官僚機構にも、競争がないため効率的な生産を行わなくなる、様々な企業統治上の要因がある。それを静学的にとらえたものが、Leibenstein のX－非効率性であり、投入と産出の技術的な関係を示す生産関数と現実の生産パフォーマンスとの間の乖離によって表わされる。Frantz は、この乖離について、多くの実証的研究をサーベイしている。

Zafirovski によれば、X－非効率性の概念は、政治的、制度的、社会的要因により、技術的生産関数と現実の生産パフォーマンスの乖離を説明する制度的経済学や経済社会学にも影響を与えている。

このように、経済における非効率性を考えるときには、静学的な厚生の損失から、動学的な成長の低下につなげることが、理論的な困難のもとになっている。本論文は、簡単なモデルにより、経済全体の動学的パフォーマンスを説明することを目的としているので、我々のこれまでのモデルの中に、非効率性を取り入れたい。具体的には、１部門の生産規模が拡大すると、他部門の生産規模が縮小することを示す項を明示的に取り入れる。

この節では、公的部門発の非効率性が民間部門をも非効率にする場合を取り上げ、次節では、民間部門発の非効率性が公的部門をも非効率にする場合を取り上げる。

⑵　公的部門発の非効率性のモデル化

公的部門に非効率性の原因があり、それが民間部門にも波及する姿を、式⑶で表わされるこれまでのモデルに取り入れると、次のようになる。

$$(5)\quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Cy - E\dot{y} \\ \dot{y} &= Bx + Dy \end{aligned}$$

公的部門の生産規模が拡大することを示すのは$\dot{y}$だが、それが係数Eを仲立ちとして、民間部門の生産規模の拡大$\dot{x}$に、マイナスの影響を与える、とするのだ。

新たなプラスの係数Eは、公的部門の非効率性が民間部門の非効率性に波及する程度を表わしているので、民間部門の公的部門による非効率化係数と呼ぼう。

この経済的背景は、次のように考えられる。公的部門は、拡大すればする程、非効率性が高まり、公的部門の生産にとってマイナスの要因になる。そしてそれが民間部門にも波及し、公的部門が拡大すればする程、民間部門の生産にとってマイナスの要因になる。逆に言えば、公的部門の非効率性が低まれば、両部門の生産にとってプラスの要因になる。

前節のモデルの式⑷で言えば、公的部門の資本ストックK_2が増える程、民間部門、公的部門の資本ストックが毀損される。

$$\dot{K}_1 = (sa_1 - m)K_1 + nK_2 - E\dot{K}_2$$
$$\dot{K}_2 = mK_1 + (la_2 - n)K_2 - F\dot{K}_2$$

ここで、公的部門の資本ストックが増えると民間部門の資本ストックが毀損されることを示すのが、$\dot{K}_1$から$E\dot{K}_2$をマイナスする項であり、公的部門自身の資本ストックが毀損されることを示すのが、$\dot{K}_2$から$F\dot{K}_2$をマイナスする項だ。それぞれの式にa_1, a_2を掛けて、定数を適当に置き直し、生産の変動を示す式であらわすと、

$$\dot{x} = Ax + Cy - E\dot{y}$$
$$\dot{y} = Bx + Dy - F\dot{y}$$

となる。ここで２番目の式を整理し、B、Dを$1 + F$で割ったものを、あらためてB、Dとおけば、式⑸になる。

式⑸は、整理すれば、次のような一般的な２次元定数係数線形微分方程式になる。

$$(6)\quad \begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned}$$

ここで、

$a_{11} = A - BE,\ a_{12} = C - DE,$
$a_{21} = B,\ a_{22} = D$

経済は、$t \geq 0$について、初期条件$x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$のもとで、動学的経路を描く。生存部門を考えているので、変数は第1象限の点(a, b)を原点として動くと、暗黙のうちに考えている。

係数の行列の特性根をλ_1、λ_2とすると、2根の和、積は、

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = A + D - BE$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = AD - BC$$

また、特性方程式の判別式は、

$$\begin{aligned} Z &= (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= (A + D - BE)^2 - 4(AD - BC) \end{aligned}$$

となる。

Eの項があることにより、a_{11}、a_{12}がマイナスになる可能性が含まれ、また係数の行列式がプラスのときは、虚根の可能性を含んでいる。このため、この微分方程式の解の動学的経路は、さまざまな形に変貌することが想定される。

実際、詳細に分析すると、民間部門の公的部門による非効率化係数Eが小さいケースでは経済は成長するが、大きくなるにつれて、民間部門が衰退したり、経済全体が空回りしたり、ついには衰退したりすることが分かる。そのケース分けは、表1のようになる。

これを以下、成長ケース、民間部門衰退ケース、空回りケース、経済全体の衰退ケースの順に検討しよう。

(3) 成長ケース

まず、民間部門の、公的部門による非効率化係数Eが小さいとき、すなわち、表1にあるように、

$$E < E_1 = \frac{C}{D}$$

のときは、経済は成長する。これには、2つのケースがあり得る。

まず、部門間の資本ストックの相互漏れ出しを表わす係数があまり大きくないときだ。前にみたように、このときは、係数の行列式はプラス、すなわち

$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} > 0$$

となる。そうすると、表1の記号を用いると、

$$D > D_1 = \frac{BC}{A}$$

となり、公的部門の自己増殖係数DがD_1より大きくなる。このケースでは、前節の図5と同じく、原点(a, b)が結節点になり、図6－1の成長1ケースのようになる。もちろん、経済の規模が生存部門の規模を下回って小さいときに経済が縮小するのは、前にみたとおりであり、これはどのケースにも共通することだ。

これに対して、部門間の資本ストックの相互漏れ出しを表わす係数が大きいと、上記の行列式はマイナスになる。そうすると、表1の記号では、$D < D_1$となり、公的部門の自己増殖係数DがD_1より小さくなる。このケースでは、原点(a, b)は鞍状点になり、図6－1の成長2ケースのようになる。

$E = E_1$のときは、$D > D_1$ならば、パラメータによって、両部門とも成長するか、民間部門が衰退するか、となる。$D < D_1$ならば、民間部

門は衰退する。このケースはまとめて、表1で、成長･民間部門衰退混合1ケースと呼んでいる。

⑷ 民間部門衰退ケース

民間部門の、公的部門による非効率化係数 E が大きくなっていくと、民間部門が成長から衰退に移る姿が出てくる。公的部門の自己増殖係数が $D > D_1$ ならば、

表1　公的部門が経済全体を非効率にする場合：ケース分け

D ＼ E	小 ←	公的部門の自己増殖係数 D		→ 大	
小		………	D_1	…………	
	: : :	成長 2(鞍状点) $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ $a_{12} > 0$	: : :	成長 1(結節点) $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ $a_{11} > 0, a_{12} > 0$	: : :
	E_1	成長・民間部門衰退混合 1 (結節点) $a_{12} = 0$			E_1
公的部門による非効率化係数 E	: : : : : : :	民間部門衰退 2 (鞍状点) $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ $a_{11} < 0, a_{12} < 0$	: : :	民間部門衰退 1 (結節点) $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ $a_{11} < a_{22}, a_{12} < 0$ このケースでは、成長・民間部門衰退混合2が起こり得る。このとき、 $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ $a_{11} > 0, a_{11} > a_{22}, a_{12} < 0$	: : : : : : :
	:			混合 3 $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ (結節点)	E_2
	: :		: :	空回り・拡大・反時計方向 (渦状点) $\mu > 0$	: :
	:			空回り・閉じた経路・反時計 $\mu = 0$ (渦心点)	E_3
	: :		: :	空回り・縮小・反時計方向 (渦状点) $\mu < 0$	: :
	:			混合 4 $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ (結節点)	E_4
大	: :		: :	衰退 (結節点) $0 > \lambda_1 > \lambda_2$	: :

注1：記号は、

$$D_1 = \frac{BC}{A}, E_1 = \frac{C}{D}, E_2 = \frac{A+D}{B} - \frac{2\sqrt{AD-BC}}{B}, E_3 = \frac{A+D}{B},$$

$$E_4 = \frac{A+D}{B} + \frac{2\sqrt{AD-BC}}{B}, a_{11} = A - BE, a_{12} = C - DE, a_{21} = B, a_{22} = D$$

注2： $D = D_1$ のケースでは、 $AD - BC = 0$ となり、事実上1部門と同じになり、原点 (a, b) は定常点ではなくなる。

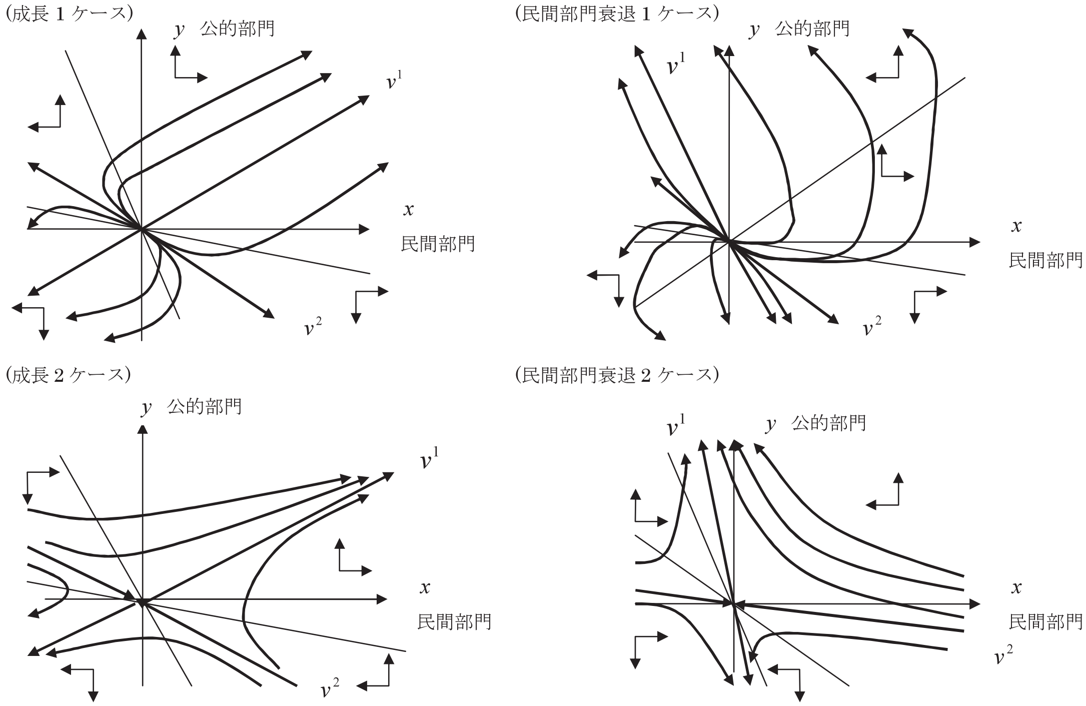

図６－１　公的部門が経済全体を非効率にする場合

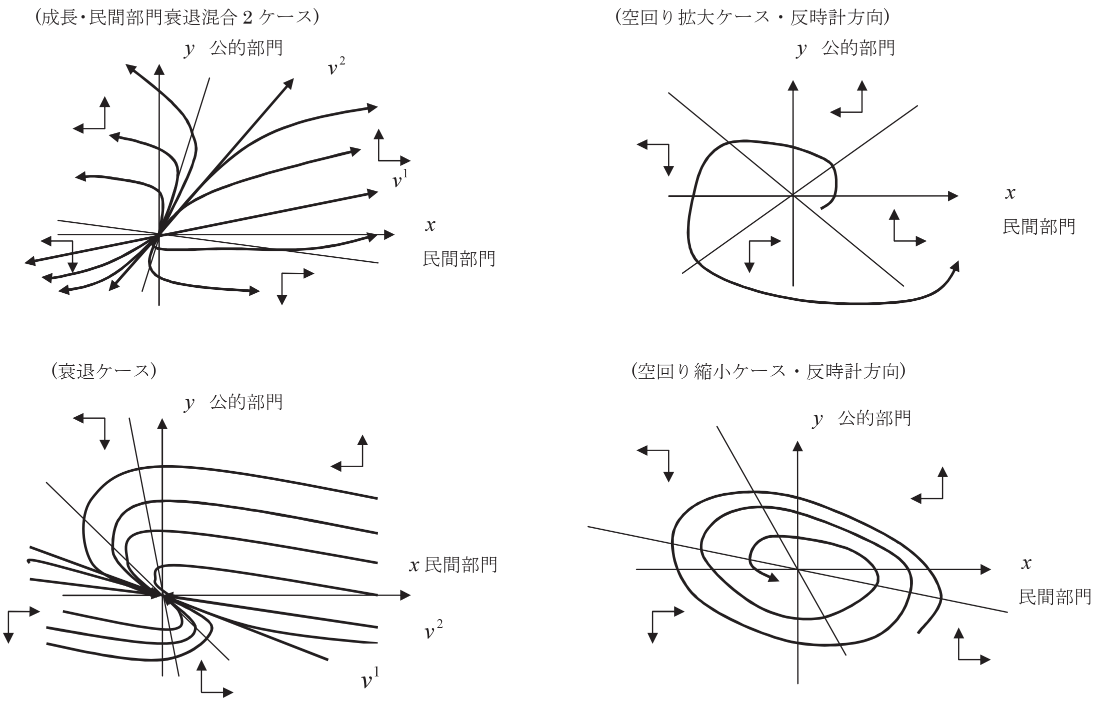

図６－２　公的部門が経済全体を非効率にする場合（続）

$E_1 < E < E_2 = \frac{A+D}{B} - \frac{2\sqrt{AD-BC}}{B}$ の

ときは、図６－１の民間部門衰退１ケースのように、民間部門の成長は急速に頭打ちとなり、やがて衰退を始め、公的部門のみが成長を続ける。このとき、原点(a, b)は結節点になる。

厳密には、民間部門衰退１ケースが成り立つ

のは、 $D > D_1 = \frac{BC}{A}$ のもとで、

$\frac{C}{D} > \frac{A-D}{B}$ が成り立つ必要がある。

これが成り立たない条件は、付録３で詳しく述べてあるが、 $A > 2\sqrt{BC}$ かつ$D_2 < D < D_3$、ここで

$$D_2 = \frac{A-\sqrt{A^2-4BC}}{2}$$

$$D_3 = \frac{A+\sqrt{A^2-4BC}}{2}$$

のときであり、このときは、初期条件によって、両部門とも成長したり、公的部門だけ成長して民間部門が衰退したりする、図６－２の成長・民間部門衰退混合２ケースになる。

$E = E_2$のときは、特性根は重根になり、やはり成長・民間部門衰退混合ケースが起こる。表１の混合３であり、詳細は省略する。

$D < D_1$ならば、特性方程式の判別式はいつもプラスなので、複雑な場合分けが起こらず、図６－１の民間部門衰退２ケースのように、$E > E_1$のときは、民間部門は衰退の一路をたどり、公的部門だけが成長する。このとき原点(a, b)は鞍状点になる。

⑸ 空回りケース

以下は、常に$D > D_1$の場合だ。民間部門の、公的部門による非効率化係数がさらに大きくなり、

$E_2 < E < E_4 = \frac{A+D}{B} + \frac{2\sqrt{AD-BC}}{B}$

のときは、状況は一変して、民間部門、公的部門の両部門は空回りを始める。これは、特性根が虚根になることに対応している。

空回りの初めのうち、つまり

$E_2 < E < E_3 = \frac{A+D}{B}$ のときは、

両部門は、反時計回りに空回りしながら拡大する。これは図６－２の、空回り・拡大ケースだ。

非効率化係数EがちょうどE_3に等しくなると、両部門は反時計回りに空回りして、閉じた経路をたどり、そこから出なくなる。

そして、非効率化係数Eがさらに大きくなり、$E_3 < E < E_4$となると、両部門は反時計回りに空回りしながら、縮小していく。これは図６－２の、空回り・縮小ケースだ。

このように、空回りの方向が反時計回りになっているのが特色だ。

これらの空回りは、原点(a, b)を中心としたものであり、この原点(a, b)が渦状点、ないし渦心点になっている。

この空回りが原点(a, b)を中心としたものであるということは、発展途上国の経済発展がうまくいかない場合に考え得る。だが、日本の経験からみると、経済発展が進んだ場合にも起こり得る。その場合には、ここでいう原点(a, b)は、経済発展の出発点ではなく、逆に、経済発展の終着点と考えた方が現実的だ。経済発展が十分進んだときには、これ以上発展出来ないということで、高い経済発展の状態の回りを空回りすることが起こり得るのだ。そう考えると、空回りの経路がすぐ座標軸にぶつかるのではなく、第１象限の広い空間を動き回るとみなすことが出来る。

⑹ 衰退ケース

空回りケースの上限である$E = E_4$のときは、特性根が重根の場合に当たり、成長と民間部門衰退の混合ケースが起こる。表1で、混合4と表示してあるが、詳細は省略する。

さらに一層、民間部門の、公的部門による非効率化が極まって、$E > E_4$になると、特性根はふたたび実根になるが、これらがマイナスの根であることに対応して、両部門とも衰退する。これが図6－2の、衰退ケースだ。

4．民間部門が経済全体を非効率にする場合

⑴ 民間部門の非効率性の考え方

民間部門が自ら非効率な経済活動をとること、それが1国経済全体を非効率にすることも、古くから議論されてきた。

Harberger は、独占企業は、生産を制限して市場価格より高く独占価格を設定し、それにより社会的な厚生の損失（死過重損失）が起こると指摘した。

Tullock は、独占企業は、独占価格を市場価格より高く設定して得られた収入を、全て自らの地位を守るため政府への移転に支出するレント・シーキング行動をとるとし、社会的な厚生の損失は死過重損失を上回ることを示した。

Leibenstein は、生産関数は資本、労働の投入と生産の間の技術的関係を表わすが、労働者はその想定どおりに全力を尽くして働くわけではないので、実際の生産パフォーマンスは生産関数を下回る、というX－非効率性を主張した。

1980年代以降、規制改革、民営化により、電力、通信、交通など自然独占と考えられてきた部門、金融業など政府の強い保護下にあった部門、さらに旧社会主義経済に競争が導入されるようになると、その効果をX－非効率性の低下、X－効率性の高まりという形でとらえる実証分析が発展した。これはFrantz に詳細なサーベイがある。この分野では、Data Envelopment Analysis（DEA）という線形計画法を用いた手法を使い、生産関数をあらかじめ特定せず、複数の投入から複数の産出を行う生産活動の効率性を測定し、その時間的な変化を比較することが盛んに行われている。

本論文のテーマである日本経済の長期低迷は、これらの世界的潮流とは逆に、民間部門の非効率性が高まった場合として考えられ、X－非効率性の高まり、X－効率性の低下と解釈出来る。実際、日本経済の長期低迷を、何らか経済の非効率性が高まったものと定式化した例は多い。

Hayashi-Prescott は、1財成長モデルを用い、長期低迷は、1990年代に全要素生産性の伸び率が低下したことによりほぼ完全に説明されることを示した。そして、これは非効率な企業や衰退する産業を補助したためであり、今後は生産性を高める改革が必要だと主張した。

Aoki-Yoshikawa-Shimizu は、無数の経済主体が、高い生産水準か低い生産水準のいずれかを確率的に選ぶ出生死滅過程に従うようなモデルが、日本経済の長期低迷の説明に適切だとした。不確実性が高まると、遷移確率が状態依存的なため、低い生産水準を選ぶ経済主体が増え続け、経済全体が悪い均衡に落ち込む。一旦このような「不確実性の罠」に陥ると、Krugman らが教科書的マクロ経済学に基づいて提言した、インフレを起こすような金融政策は効果がないと主張した。

バブル拡大について、Hayashi-Prescott によれば、もともと実現不可能な高い生産性上昇を期待して過剰投資になったものだし、Aoki-Yoshikawa-Shimizu によれば、土地集約的な投資が高い収益をあげるという間違った期待のため、地価が上がり、同時に土地集約的な投資が拡大したものであり、両者とも実現不可能な期待が原因だとした。

長期低迷について、Hayashi-Prescott は、銀

行貸付の低下が企業の投資を制約したことはなかったとし、Aoki-Yoshikawa-Shimizu は、日本では投資の金利弾力性が低いので、金利低下は投資回復の効果がなかったとし、いずれも長期低迷は金融的要因によるものではないとした。

しかし長期低迷について Mishkin、小林らは、不良債権の巨大化のため、金融部門、企業部門、規制当局の間の情報の非対称性が高まり、事後のモラルハザード、事前の逆選択が顕著になって、資金が生産性の高い部門に流れず、生産性の低い部門に流れ、全体として生産性の伸び率が低下することが原因だとして、ミクロの金融的要因の重要性を指摘していた。Ahearne-Shinada は、ゾンビ企業仮説として、これを検証した。このように、日本経済の非効率性の高まりは、信用システムの崩壊も原因となっていると考えられる。

⑵　民間部門発の非効率性のモデル化

以上概観すると、日本経済の長期低迷については、理論的な導き方は異なるものの、民間部門において、生産性の高い企業よりも生産性の低い企業の割合が高まったため、全体としても生産性の伸び率が低下したことが原因であり、この間、公的部門は収益性の低い公共投資を増やし、生産性の低い部門に資金を流し続けた、ということで広く一致が見られる。

これを我々のモデルで考えれば、民間部門の非効率性が高まり、経済全体を非効率にしたものと解釈出来る。従ってモデル化に当たっては、第３節で公的部門の非効率性が民間部門に波及するのをモデル化したのを逆にすればよい。

民間部門が拡大すればする程、非効率性が高まり、民間部門の生産にとってマイナスの要因になり、それが公的部門にとってもマイナスの要因になる。これを生産性の伸び率の低下と考えるかわりに、我々のモデルでは、民間部門の資本ストックが増える程、民間部門、公的部門の資本ストックが毀損されると考える。すると、第３節と同様に、民間部門の生産を x、公的部門の生産を y とすると、

$$\dot{x} = Ax + Cy - E\dot{x}$$
$$\dot{y} = Bx + Dy - F\dot{x}$$

となり、１番目の式を整理して記号を置き直せば、

$$(7)\quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Cy \\ \dot{y} &= Bx + Dy - F\dot{x} \end{aligned}$$

を得る。式⑸では、マイナスの項が公的部門発で民間部門に波及することを示したのに対し、この式⑺では、マイナスの項は民間部門発で公的部門に波及することを示している。

この式⑺を整理すると、式⑹と同じように、

$$(8)\quad \begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$a_{11} = A,\ a_{12} = C,$$
$$a_{21} = B - AF,\ a_{22} = D - CF$$

前と同様に、経済は、$t \geq 0$ について、初期条件 $x(0) = x_0,\ y(0) = y_0$ のもとで、動学的経路を描く。生存部門を考えているので、変数は第１象限の点 $(a,\ b)$ を原点として動くと、暗黙のうちに考えている。

係数の行列の特性根を λ_1、λ_2 とすると、２根の和、積は、

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = A + D - CF$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = AD - BC$$

また、特性方程式の判別式は、

$$
\begin{aligned}
Z &= (a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\\
&= (A+D-CF)^2-4(AD-BC)
\end{aligned}
$$

となる。

このように、民間部門発の非効率性を我々のモデルで定式化すると、第３節の公的部門発の非効率性のモデルにおいて、

$$x \Leftrightarrow y,\ A \Leftrightarrow D,\ B \Leftrightarrow C,\ E \Rightarrow F,$$
$$a_{11} \Leftrightarrow a_{22},\ a_{12} \Leftrightarrow a_{21}$$

と置き換えたものになる。従って、民間部門発の非効率性の分析は、前節の公的部門発の非効率性の分析結果を読み替えるだけで得られる。それが表２に要約されており、成長ケース、公的部門衰退ケース、空回りケース、衰退ケースがある。それらを図示したものが、図７－１、図７－２だ。

以下、ケース毎に要点だけを述べよう。

⑶　成長ケース

公的部門の、民間部門による非効率化係数Fが小さいとき、表２にあるように、

$$F<F_1=\frac{B}{A}$$

のときは、経済は成長する。このうち、

$$A>A_1=\frac{BC}{D}$$

と民間部門の成長係数が大きいならば、図７－１の成長１ケースになり、原点$(a,\ b)$は結節点になる。他方$A<A_1$ならば、成長２ケースになり、原点は鞍状点になる。$F=F_1$のときは、成長・公的部門衰退混合１ケースになる。

⑷　公的部門衰退ケース

公的部門の、民間部門による非効率化係数Fが大きくなると、公的部門が衰退する姿が出てくる。民間部門の成長係数$A>A_1$ならば、

$$F_1<F<F_2=\frac{D+A}{C}-\frac{2\sqrt{AD-BC}}{C}$$

のときは、図７－１の公的部門衰退１ケースになり、原点$(a,\ b)$は結節点になる。

こうなるためには、厳密には、

$$A>A_1=\frac{BC}{D}\quad のもとで、\frac{B}{A}>\frac{D-A}{C}\quad が$$

成り立つ必要があり、これが成り立たない場合には､図７－２の成長･公的部門衰退混合２ケースが起こる｡この混合２ケースが起こる条件は､前と同様に、

$$D>2\sqrt{BC}\quad かつ、A_2<A<A_3、ここで、$$

$$A_2=\frac{D-\sqrt{D^2-4BC}}{2}$$

$$A_3=\frac{D+\sqrt{D^2-4BC}}{2}$$

となる。

$F=F_2$のときは、成長・公的部門衰退混合３ケースになる。

民間部門の成長係数$A<A_1$ならば、$F>F_1$のときは、図７－１の公的部門衰退２ケースのように、公的部門は衰退し、民間部門だけが成長する。原点$(a,\ b)$は鞍状点になる。

⑸　空回りケース

以下は、$A>A_1$の場合だ。公的部門の、民間部門による非効率化係数Fがさらに大きくなり、

$$F_2<F<F_4=\frac{D+A}{C}+\frac{2\sqrt{AD-BC}}{C}$$

のときは、民間部門、公的部門の両部門は空回りを始める。空回りの初めのうち、つまり、

$F_2 < F < F_3$

ここで

$$F_3 = \frac{D+A}{C}$$

のときは、図7－2のように、両部門は、時計

表2　民間部門が経済全体を非効率にする場合：ケース分け

A ＼ F	小 ← 民間部門の成長係数 A → 大				
↑ 小		………	A_1	…………	
	: : :	成長 2(鞍状点) $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ $a_{21} > 0$	: : :	成長 1(結節点) $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ $a_{22} > 0, a_{21} > 0$	: : :
	F_1	成長・公的部門衰退混合 1(結節点) $a_{21} = 0$			F_1
民間部門による非効率化係数 F	: : : : : : :	公的部門衰退 2 (鞍状点) $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ $a_{22} < 0, a_{21} < 0$	: : :	公的部門衰退 1　(結節点) $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ $a_{22} < a_{11}, a_{21} < 0$ このケースでは、成長・公的部門衰退混合 2 が起こり得る。このとき、 $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ $a_{22} > 0, a_{22} > a_{11}, a_{21} < 0$	: : : : : : :
	:			混合 3　$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$（結節点）	F_2
	: :		: : :	空回り・拡大・時計方向（渦状点） $\mu > 0$	: :
	:			空回り・閉じた経路・時計 $\mu = 0$(渦心点)	F_3
	: :		: :	空回り・縮小　・時計方向　（渦状点） $\mu < 0$	: :
	:			混合 4　$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$（結節点）	F_4
↓ 大	: :		: :	衰退（結節点） $0 > \lambda_1 > \lambda_2$	: :

注 1：記号は、

$$A_1 = \frac{BC}{D}, F_1 = \frac{B}{A}, F_2 = \frac{D+A}{C} - \frac{2\sqrt{AD-BC}}{C}, F_3 = \frac{D+A}{C},$$

$$F_4 = \frac{D+A}{C} + \frac{2\sqrt{AD-BC}}{C}, a_{11} = A, a_{12} = C, a_{21} = B - AF, a_{22} = D - CF.$$

注 2：$A = A_1$ のケースでは、$AD - BC = 0$ となり、事実上 1 部門と同じになり、原点 (a, b) は定常点ではなくなる。

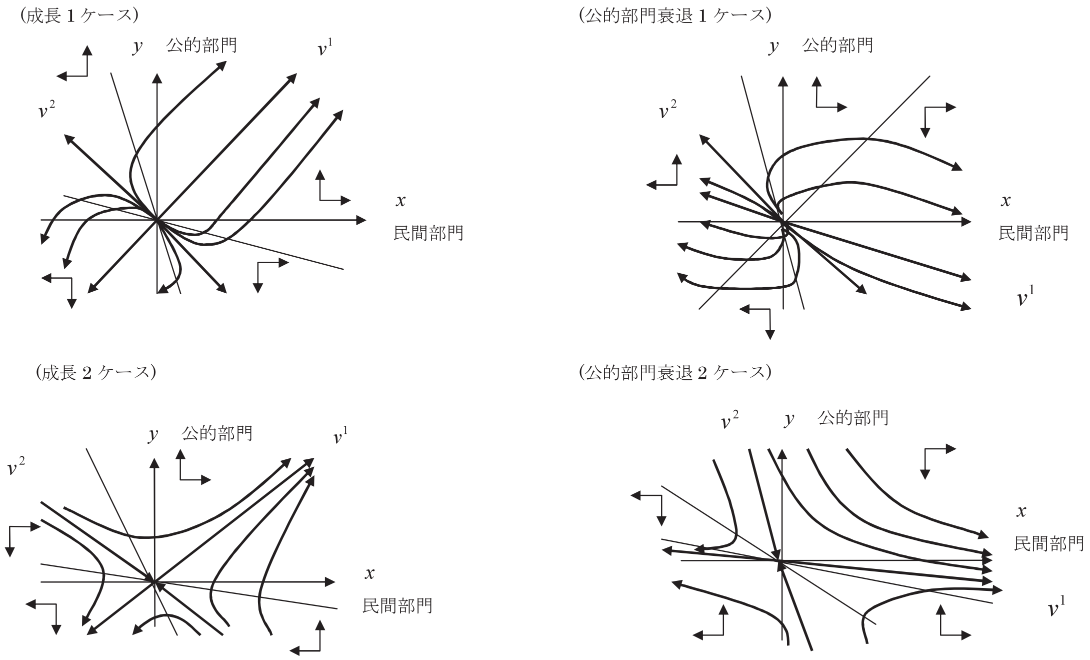

図７－１　民間部門が経済全体を非効率にする場合

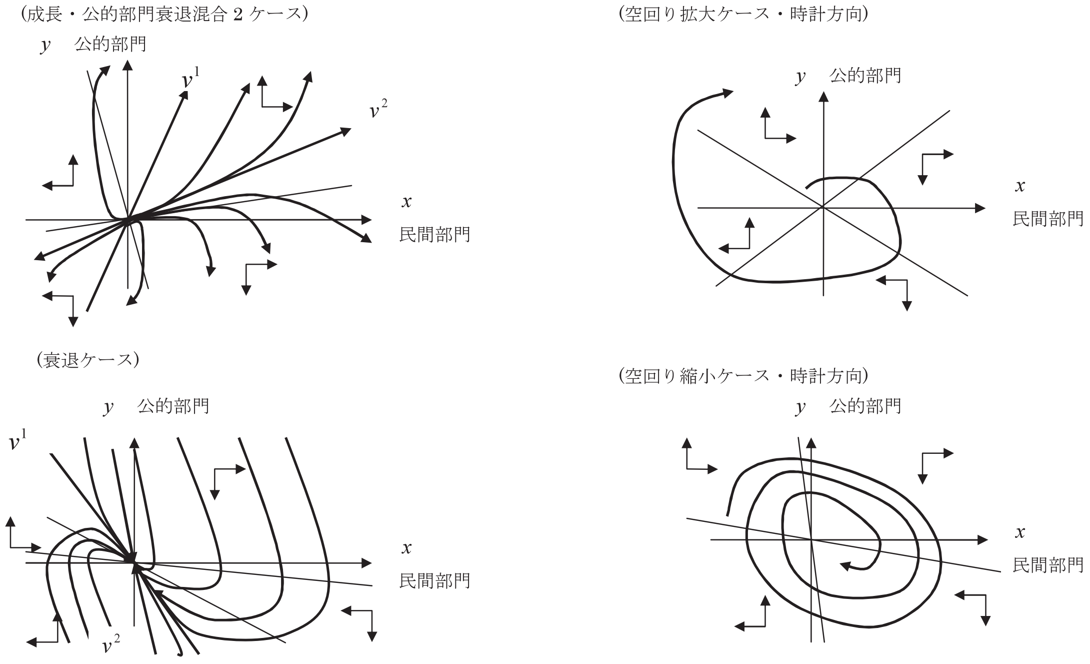

図７－２　民間部門が経済全体を非効率にする場合（続）

回りに空回りしながら拡大する。

非効率化係数$F = F_3$のときは、両部門は時計回りに空回りして閉じた経路をたどる。

そして非効率化係数$F_3 < F < F_4$がとなると、図7－2のように、両部門は、時計回りに空回りしながら、縮小していく。

このように、民間部門発の非効率化のケースでは、時計回りに空回りするのが特色だ。

これらの空回りは、原点(a, b)を中心とするものであり、渦状点ないし渦心点になっている。

前にも見たように、この原点(a, b)は、経済発展の出発点というよりは、終着点と考えた方が現実的だ。経済発展が進んだ段階では、これ以上発展出来ないということで、高い経済発展の状態の回りを空回りすることが起こり得る。

⑹　衰退ケース

空回りケースの上限である$F = F_4$のときは、成長・民間部門衰退混合4ケースが起こる。公的部門の、民間部門による非効率性が極まって、$F > F_4$になると、図7－2にあるように、両部門とも衰退する。これは特性根が実根でともにマイナスになることに対応している。

5．構造変化によりパラメータが変わる場合

⑴　日本経済のたどった経路の解釈

以上のモデル分析を経て、第1節でみた、過去25年日本経済がたどった経路を振り返ってみよう。図3で模式的に表わしたところによれば、この間日本経済は、11年成長、8年時計方向空回り、4年反時計方向空回り、2年成長という経路をたどった。

これを表1、表2、図6－1、図6－2、図7－1、図7－2で示されたモデル分析の結果と比べると、最初の11年成長は、いずれかの成長ケースになる。

次の8年時計方向空回りは、図7－2のように、民間部門が経済全体を非効率にした場合に当たり、しかも縮小ケースになる。

その次の4年反時計方向空回りは、図6－2のように、公的部門が経済全体を非効率にした場合に当たり、しかも縮小ケースになる。

最近の2年成長は、またいずれかの成長ケースになる。

このように日本経済のたどった経路がさまざまなケースにまたがるためには、我々のモデル上において、パラメータが変わらなければならない。

第1に、11年成長から8年時計方向空回り縮小となるためには、民間部門が経済全体を非効率にする場合のうち、非効率化係数Fが当初小さく$F < F_1$だったが、ある時点で上にジャンプして$F_3 < F < F_4$となったと考えれば対応がつく。表2、図7－1、図7－2において、成長1ケースから、空回り縮小ケースに移ったと考えることになる。

第2に、8年時計方向空回り縮小から、4年反時計方向空回り縮小に移るためには、非効率化の原因が民間部門から公的部門にシフトしたと考えねばならない。我々の分析の都合上、非効率化の要因を公的部門発と民間部門発に分けたが、実際は両者の要因がともに存在し、いずれかの影響が強まって、時計方向に空回りしたり、反時計方向に空回りしたりする、と考えればよい。

第3に、4年反時計回り縮小から2年成長に移るためには、公的部門が経済全体を非効率にする場合のうち、非効率化係数Eが、$E_3 < E < E_4$という高い水準から、下にジャンプして$E < E_1$となったと考えればよい。

⑵　加速度による表示

以上の解釈では、原点(a, b)について触れなかったが、例えば図7－1の成長1ケースから、図7－2の空回り縮小ケースに移ると、原点(a, b)も、経済発展の出発点という位置づけから、

終着点という位置づけに変わる。

つまり、微分方程式(8)を厳密に書くと、成長２ケースでは、経済発展の出発点(a_0, b_0)を原点として、

$$\dot{x} = a_{11}(x - a_0) + a_{12}(y - b_0)$$
$$\dot{y} = a_{21}(x - a_0) + a_{22}(y - b_0)$$

となり、空回り縮小ケースでは、経済発展の終着点(a_1, b_1)を原点として、

$$\dot{x} = a_{11}(x - a_1) + a_{12}(y - b_1)$$
$$\dot{y} = a_{21}(x - a_1) + a_{22}(y - b_1)$$

となる訳だ。

だが、このように原点が変わるようでは、モデルとして複雑すぎるし、どこが原点になるのかもあらかじめ分かっておくことは非現実的だ。

この問題を切り抜けるためには、これらをもう１回時間で微分して、生産の変化速度$\dot{x}, \dot{y}$と、加速度$\ddot{x}, \ddot{y}$の間の式

$$(9)\quad \begin{aligned} \ddot{x} &= a_{11}\dot{x} + a_{12}\dot{y} \\ \ddot{y} &= a_{21}\dot{x} + a_{22}\dot{y} \end{aligned}$$

とすればよい。そうすれば、原点を明示しない表現が得られる。そのかわり、これを民間部門、公的部門の行動方程式と考えるためには、$t = t_0$における初期条件として$x(t_0)$, $y(t_0)$を与えるだけでなく、変化速度の初期条件$\dot{x}(t_0)$, $\dot{y}(t_0)$も与える必要がある。

ということは、11年成長から８年空回り縮小に移るとき、パラメータFが変わるだけでなく、民間部門、公的部門がそれぞれ減少方向、増加方向に動き出した、とすることが必要になる。このように定式化すると、空回りの中心になる原点がどこにあるかは、内生的に決まるのであり、あらかじめ与える必要がないので便利であり、現実的でもある。

８年空回りのときは、どこが経済発展の終着点か知らずに、さまよった訳だ。

おわりに

日本経済の長期低迷について、私は10年近く、図１のように、民需を横軸に、公需を縦軸にとった散布図を描いては、この空回りから脱出するのはいつか、思い描いてきた。

同時に、この空回りは、生物生態学において、池にいる大きな魚と小さな魚が、捕食者と餌食として、それらの総数が循環的変化を示すという、Lotka-Volterraの２次元微分方程式によるモデルが当てはまるのではないか、と考えていた。頭にあったのは、公的部門が民間部門を食い物にする、という図式だった。

日本経済が長い空回りから脱出し、新たな成長を始めた今、この生物生態学モデルで説明出来るか、確かめようと始めたのがこの論文だ。だが、生物生態学では、池全体に魚が住める数が限られていることを念頭におくのに対し、経済学では、資源制約、地球環境制約を分析のテーマにしない限りは、経済は無制限に成長可能だと考える。このため、本論文で扱うモデルは、Lotka-Volterraよりもっと基本的な、２次元線形微分方程式になった。

さらに、成長と長期低迷の両方の可能性を持つ２次元線形微分方程式を、直感的に立てることは容易だったが、その経済的背景を定式化するのが一苦労だった。

経済が常に持てる力を発揮するため、変化に対してスムーズに調整すると考えれば、経済は成長するが、長期低迷はしない。このため、経済が持てる力を発揮せず、変化に対してスムーズに調整しないような、非効率な行動様式を取り入れる必要があった。大方の文献は、生産性伸び率の低下として定式化しているが、本論文では、部門固有な資本ストックとか、資本ストッ

クの毀損という定式化で表現した。

本論文で意味のある発見は、非効率性の発生源が公的部門の場合、民間部門の場合で分けると、それぞれ非効率性を示すパラメータ１つで、成長、空回り、衰退のケースがカバー出来る、ということだろう。

そして、横軸に民間部門の生産、縦軸に公的部門の生産をとると、空回りのケースでは、公的部門が非効率性の発生源のときは反時計回り、民間部門が非効率性の発生源のときは時計回りと、はっきり目に見える違いが出ることが分かった。

公的部門が民間部門を食い物にするだけでなく、民間部門が公的部門を食い物にすることが、現実の日本経済で起こったのだ。

このように、パラメータ１つの動きで様々なケースが生ずるので、経済の動きを表わす位相図は、２次元自律系の教科書にある図を総ざらいすることになった。だが本論文において、これらの図は、どういう条件のもとではどの図になるか、すべて符号条件を証明した上で描いてある。それだけに、式だらけの論文になってしまった。

本論文でもう１つ苦労したのは、経済変数はマイナスの符号はとらず、ゼロの近辺の行動も通常の経済学ではあまり論じられていないことだった。経済が衰退したり、消滅したりすることは、あまり考えられてこなかったためだろう。

これはマクロ経済学で名目金利ゼロや実質金利マイナスの部分があまり論じられてこなかったのに、日本経済で実際に起こったということに似ている。

具体的には、微分方程式の定常解となる原点の意味付けや、解の位相図が座標軸を切る場合の解釈の問題だ。本論文では、開発経済学でしばしば見られるように、経済の規模が小さいところには、生存部門が存在することを前提とし、それを原点とした。それでも、日本経済のように高い経済水準で空回りするときの定常解は、生存部門まで低下したとは言えない。そこで、そのような場合には、逆に、経済発展の終着点のまわりで空回りする、と解釈した。

本論文では、極めて簡単な経済的背景を前提にして、十分複雑な行動方程式や結果が出てきた。価格、利子率、異時点間の最適行動、金融などを取り入れれば、経済的背景はより複雑になり、もっと複雑な行動方程式や結果が出てくることだろう。だがその場合にも、主要変数を２つに絞り込めば、本論文の２次元線形微分方程式による結果は局所的な近似として成り立ち、何らかの指針にはなると思われる。

（付録１）資本ストックの生存部門への漏れ出しのモデル化

各部門の資本ストックの一部が、部門内の生存部門に漏れ出す場合を、モデル上で、より明示的に検討しよう。簡単のために、第２節⑵でみた部門固有資本モデルで考える。

民間部門の資本ストックK_1の一部K_{10}は、民間部門の中の生存部門に漏れ出し、低い資本生産性a_{10}で民間財を生産し、その後消滅する。このため、民間部門の生産関数は、

$$x = a_1(K_1 - K_{10}) + a_{10}K_{10}$$

となる。資本ストックK_1が、漏れ出し分K_{10}を上回った分だけが、通常の資本生産性a_1を持つ技術での生産に使われる。資本ストックK_1が、漏れ出し分K_{10}を下回るならば、生存部門の生産が上の式で表わされるだけ減少する、と考える。

これと同様に、公的部門の生産関数は、

$$y = a_2(K_2 - K_{20}) + a_{20}K_{20}$$

となる。

生存部門の生産は民間消費、公的消費に回るとし、それらを

$$C_0 = a_{10}K_{10}$$
$$G_0 = a_{20}K_{20}$$

と書く。GDP は、$Y = x + y$
であり、このうち、生存部門の生産、消費に当たる部分を Y_0 と書くと、

$$Y_0 = a_{10}K_{10} + a_{20}K_{20} = C_0 + G_0$$
$$Y - Y_0 = a_1(K_1 - K_{10}) + a_2(K_2 - K_{20})$$

となる。

すると、民間消費、民間投資、公的消費、公共投資はそれぞれ、次のように書ける。

$$C = (1-s)(1-\tau)(Y - Y_0) + C_0$$
$$I = s(1-\tau)(Y - Y_0)$$
$$G_C = (1-l)\tau(Y - Y_0) + G_0$$
$$G_I = l\tau(Y - Y_0)$$

GDP ＝生産＝支出を表わす式は、

$$Y = x + y = C + I + G_C + G_I$$

と満たされている。

生存部門への漏れ出しを除いた生産が、生存部門を除いた民間消費、公的消費に回り、民間投資、公共投資に回る。もし生存部門への漏れ出しを除いた生産がマイナスならば、民間消費、公的消費は生存部門の規模を下回り、民間投資、公共投資はマイナスとなり、次期の資本ストックが毀損される。

税率 τ は、

$$\tau = \frac{y - a_{20}K_{20}}{Y - Y_0}$$

$$1 - \tau = \frac{x - a_{10}K_{10}}{Y - Y_0}$$

から決まる。

資本蓄積は、

$$\dot{K}_1 = I = sa_1(K_1 - K_{10})$$
$$\dot{K}_2 = G_I = la_2(K_2 - K_{20})$$

となる。次期の資本蓄積に回るのは、当期の資本ストックから生存部門への漏れ出しを引いた分がベースになる。もし当期の資本ストックが生存部門への漏れ出しを下回るならば、それだけ次期の資本ストックが毀損されるものと解釈する。

これより、各部門の生産の動学は、

$$\dot{x} = a_1\dot{K}_1 = sa_1(x - a_{10}K_{10})$$
$$\dot{y} = a_2\dot{K}_2 = la_2(y - a_{20}K_{20})$$

となる。

以上のように、生存部門への漏れ出しがある場合には、

$$K_1 - K_{10} \Rightarrow K_1$$
$$K_2 - K_{20} \Rightarrow K_2$$
$$x - a_{10}K_{10} \Rightarrow x$$
$$y - a_{20}K_{20} \Rightarrow y$$

と置き換えれば、前のモデルと同じになる。

各部門の生産の動学を表わす位相図は、原点を $(a_{10}K_{10},\ a_{20}K_{20})$ に平行移動したのと同じになる。このため、本文中では、生存部門を明示的には書かないが、位相図においては、原点が第１象限にあるように描いている。

（付録２）２次元線形微分方程式の解とその性質

２次元線形微分方程式を、

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y$$
$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y$$

とする。時間 $t \geq 0$ とし、初期条件を

$x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$

とする。係数の行列をAで表わせば、微分方程式は、

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

とも書ける。この行列の特性方程式は、

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

あるいは、

$$|A-\lambda I|=0$$

であり、特性根λ_1, λ_2は、判別式を

$$\begin{aligned}Z&=(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\\ &=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}\end{aligned}$$

とすると、

$$\lambda_1=\frac{a_{11}+a_{22}+\sqrt{Z}}{2}$$

$$\lambda_2=\frac{a_{11}+a_{22}-\sqrt{Z}}{2}$$

となる。これらの和、積は、

$$\lambda_1+\lambda_2=a_{11}+a_{22}$$
$$\lambda_1\lambda_2=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

　また、実根の場合は、

$$\lambda_1-\lambda_2=\sqrt{Z}\geq 0$$

固有ベクトルを

$$v^i=\begin{pmatrix}v_1^i\\ v_2^i\end{pmatrix}$$

とすると$(i=1,2)$、

$$Av^i=\lambda_i v^i$$

あるいは、

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}v_1^i\\ v_2^i\end{pmatrix}=\lambda_i\begin{pmatrix}v_1^i\\ v_2^i\end{pmatrix}$$

が成り立つ。

　以上を用いると、微分方程式の解は、$\lambda_1\neq\lambda_2$の場合は、

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}v_1^1\\ v_2^1\end{pmatrix}e^{\lambda_1 t}+c_2\begin{pmatrix}v_1^2\\ v_2^2\end{pmatrix}e^{\lambda_2 t}$$

となる。

（代入により、容易に確かめられる。）

ここで、係数c_1, c_2は、初期条件から

$$\begin{bmatrix}v_1^1 & v_1^2\\ v_2^1 & v_2^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$$

により決まる。

　特性根が重根で、$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$の場合は、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}&=c_1\begin{pmatrix}1+(a_{11}-\lambda)t\\ a_{21}t\end{pmatrix}e^{\lambda t}\\ &\quad+c_2\begin{pmatrix}a_{12}t\\ 1+(a_{22}-\lambda)t\end{pmatrix}e^{\lambda t}\end{aligned}$$

となる。

　特性根が虚根の場合は、

$$\lambda_1=\mu+i\upsilon$$
$$\lambda_2=\mu-i\upsilon$$
$$\upsilon>0$$

とおき、$\mu+i\upsilon$に対応する固有ベクトルをv_1+iv_2とおくと、微分方程式の解は、次のu^1, u^2の1次結合になる。

$$u^1(t)=e^{\mu t}(v_1\cos\upsilon t-v_2\sin\upsilon t)$$
$$u^2(t)=e^{\mu t}(v_1\sin\upsilon t+v_2\cos\upsilon t)$$

以上は、Agarwal, Gupta, Essentials of Ordinary Differential Equations を参考にした。

定常点は、$\dot{x}\equiv 0,\ \dot{y}\equiv 0$となる点であり、原点がこれになる。生存部門への漏れ出しを考え第１象限の点(a, b)を基準として変数を測り、微分方程式が

$$\dot{x}=a_{11}(x-a)+a_{12}(y-b)$$
$$\dot{y}=a_{21}(x-a)+a_{22}(y-b)$$

と書けるときは、(a, b)が定常点になる。本文では、微分方程式の解の動学的経路を表わす位相図において、このような(a, b)を原点として描いている。

（付録３）公的部門が経済全体を非効率にする場合の図６－１、６－２の根拠

まず特性根が実数で異なるとき、位相図を描くに際して必要なさまざまな比率の関係を調べておく。

民間部門の生産に対する公的部門の生産の比率$\dfrac{y}{x}$は、固有ベクトルの比率

$$p_1=\frac{v_2^1}{v_1^1},\quad p_2=\frac{v_2^2}{v_1^2}$$

に漸近する。

また位相図で、解(x, y)の動く方向を区分する直線の傾きは、

$$q_1=-\frac{a_{11}}{a_{12}},\quad q_2=-\frac{a_{21}}{a_{22}}$$

で表わされる。これらの間の関係は、
固有ベクトルの定義の式から得られる

$$\frac{v_2^i}{v_1^i}=-\frac{a_{11}-\lambda_i}{a_{12}}=\frac{a_{21}}{a_{22}-\lambda_i}$$

を用いると、次のように定められる。

$$q_1-q_2=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{12}a_{22}}=-\frac{\lambda_1\lambda_2}{a_{12}a_{22}}$$

$$p_i-q_1=\frac{v_2^i}{v_1^i}-\left(-\frac{a_{11}}{a_{12}}\right)=\frac{\lambda_i}{a_{12}}$$

$$\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_2}=\frac{v_1^i}{v_2^i}-\left(-\frac{a_{22}}{a_{21}}\right)=\frac{\lambda_i}{a_{21}}$$

$$p_1-p_2=\frac{v_2^1}{v_1^1}-\frac{v_2^2}{v_1^2}=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{a_{12}}$$

$$p_1+p_2=\frac{v_2^1}{v_1^1}+\frac{v_2^2}{v_1^2}=\frac{a_{22}-a_{11}}{a_{12}}$$

$$p_1p_2=\frac{v_2^1\,v_2^2}{v_1^1\,v_1^2}$$
$$=\frac{a_{11}^2-(\lambda_1+\lambda_2)a_{11}+\lambda_1\lambda_2}{a_{12}^2}=-\frac{a_{21}}{a_{12}}$$

本文の位相図は、これらの比率の大小関係によって、ケース分けされている。上記の関係式を用いて、ケース毎の大小関係を求めよう。

まず表１にあるように、記号を次のように定める。

$$D_1=\frac{BC}{A},\quad E_1=\frac{C}{D},$$

$$E_2=\frac{A+D}{B}-\frac{2\sqrt{AD-BC}}{B},$$

$$E_3=\frac{A+D}{B},$$

$$E_4=\frac{A+D}{B}+\frac{2\sqrt{AD-BC}}{B},$$

$a_{11}=A-BE,\ a_{12}=C-DE,$
$a_{21}=B,\ a_{22}=D$

ここで、$E_2>E_1$は、

$$E_2-E_1=\frac{(D-\sqrt{AD-BC})^2}{2}>0$$

により成り立つ。

各ケースの結果は次のように証明される。

（成長１ケース）

(A1) $\lambda_1 > \lambda_2 > 0, a_{11} > 0, a_{12} > 0,$
$p_1 > 0 > q_2 > p_2 > q_1$

まず$D > D_1, E < E_1$から、

$$E < \frac{C}{D} < \frac{A}{B}$$

よって、$a_{11} > 0$，$a_{12} > 0$、
また、

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = AD - BC > 0。$$

よって、

$$q_1 - q_2 = -\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{12}a_{22}} < 0、$$

かつ、$\lambda_1 + \lambda_2 > 0$，$\lambda_1\lambda_2 > 0$。
よって、$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$となり、

$$p_1 - p_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{a_{12}} > 0。$$

さらに、

$$p_1p_2 = -\frac{a_{21}}{a_{12}} < 0$$

だから、$p_1 > 0 > p_2$。
また、

$$p_2 - q_1 = \frac{\lambda_2}{a_{12}} > 0、$$

さらに、

$$\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} = \frac{\lambda_2}{a_{21}} > 0$$

であり、$p_2 < 0$, $q_2 < 0$だから、$p_2 < q_2$。
以上で(A1)が証明された。

なお、$E = E_1$のときは、両部門とも成長するか、公的部門だけ成長し民間部門が衰退するかが起こり、成長・民間部門衰退混合１ケースになる。このケースでは、$a_{11} > 0$，$a_{12} = 0$となり、民間部門の生産は伸び率a_{11}の項で表わされ、公的部門の生産は伸び率a_{11}の項と、伸び率a_{22}の項の和で表わされるので、$a_{11} > a_{22}$または$a_{11} = a_{22}$ならば、両部門とも成長するが、$a_{11} < a_{22}$ならば、民間部門のシェアは限りなくゼロに近づき衰退する。

（成長２ケース）

(A2) $\lambda_1 > 0 > \lambda_2, a_{12} > 0,$
$p_1 > q_1 > p_2 > q_2,$
$p_1 > 0 > p_2$

上と同様に、$E < E_1$から、$a_{12} > 0$。だが今度は、$D < D_1$だから、

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{21} = AD - BC < 0。$$

よって、

$$q_1 - q_2 = -\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{12}a_{22}} > 0、$$

かつ、$\lambda_1\lambda_2 < 0$。
よって、$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$となり、

$$p_1 - p_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{a_{12}} > 0。$$

さらに、$p_1p_2 = -\dfrac{a_{21}}{a_{12}} < 0$、

だから、$p_1 > 0 > p_2$。

$p_i - q_1 = \dfrac{\lambda_i}{a_{12}}$ から、$p_1 > q_1, p_2 < q_1$。

また、$\dfrac{1}{p_2} - \dfrac{1}{q_2} = \dfrac{\lambda_2}{a_{21}} < 0$、

かつ$p_2<0, q_2<0$、
よって、$p_2>q_2$。
以上で、(A2)が証明された。

このケースでも、$E=E_1=\dfrac{C}{D}$ のときは、$a_{12}=0$だが、$D<D_1=\dfrac{BC}{A}$ であるため、$a_{11}=A-BC<0$となる。よって、表１の成長・民間部門衰退混合１ケースのうち、民間部門が衰退を続けるケースとなる。

(民間部門衰退１ケース)

(A3) $\lambda_1>\lambda_2>0, a_{11}<a_{22}, a_{12}<0,$
$q_1>q_2, 0>q_2>p_2>p_1$

これが成り立つには、$D>D_1$のもとで

さらに、$E_1=\dfrac{C}{D}>\dfrac{A-D}{B}$ の条件がいる。

この条件が成り立つとすると(成り立つ条件は後述)、$E>E_1$のもとで、

$a_{12}<0, a_{11}-a_{22}<0$。
よって、

$$p_1+p_2=\frac{a_{22}-a_{11}}{a_{12}}<0$$

$$p_1p_2=-\frac{a_{21}}{a_{12}}>0$$

となり、p_1、p_2とも、マイナスになる。
$E<E_2$から、後に空回り・拡大ケースで述べるように、λ_1, λ_2は実根となるので、

$$p_1-p_2=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{a_{12}}<0、$$

よって、$0>p_2>p_1$。
また、$E<E_2$から$A-BE+D>0$だから、

$$\lambda_1+\lambda_2=a_{11}+a_{22}>0$$

さらに、$\lambda_1\lambda_2>0$
よって、２根ともプラスとなる。よって、

$$p_i-q_1=\frac{\lambda_i}{a_{12}}<0$$

また、

$$\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_2}=\frac{\lambda_i}{a_{21}}>0$$

p_i、q_2ともマイナスだから、$p_i<q_2$。

一方、
$q_1-q_2>0$、$q_2<0$。
以上で、(A3)が証明された。

さて、$D>D_1=\dfrac{BC}{A}$ のもとで、
$\dfrac{C}{D}>\dfrac{A-D}{B}$ が成り立たないのは、
どういうときであろうか？

$$\frac{C}{D}-\frac{A-D}{B}=\frac{D^2-AD+BC}{BD}$$

だから、この符号は、２次関数

$$f(D)=D^2-AD+BC$$

の符号と同じになる。これがマイナスになるのは、判別式が正で$A>2\sqrt{BC}$ となり、かつ$D_2<D<D_3$、ここで、

$$D_2=\frac{A-\sqrt{A^2-4BC}}{2},$$

$$D_3=\frac{A+\sqrt{A^2-4BC}}{2}$$

のときに限られる。これは、

$$\frac{BC}{A} < 2\frac{BC}{A} < \frac{A}{2}$$

$$f\left(\frac{BC}{A}\right) > 0,\ \ f\left(\frac{A}{2}\right) < 0$$

により、２次関数がゼロとなるのは、

$D > \dfrac{BC}{A}$　の部分においてであることが

分かるためだ。

このときは、初期条件によって、両部門とも成長したり、公共部門だけ成長して民間部門が衰退したりする、次の成長・民間部門衰退混合２ケースになる。

よって、上記の条件以外のときは、

$\dfrac{C}{D} > \dfrac{A-D}{B}$　が成り立つ。

（成長・民間部門衰退混合２ケース）

$$\text{(A4)}\quad \begin{array}{l} \lambda_1 > \lambda_2 > 0, \\ a_{11} > 0,\ a_{11} > a_{22},\ a_{12} < 0, \\ q_1 > p_2 > p_1 > 0 > q_2 \end{array}$$

このケースが起こるのは、上に述べたように、D が $f(D) = D^2 - AD + BC < 0$ を満たすとき、

すなわち、$\dfrac{C}{D} < \dfrac{A-D}{B}$　のときに限られる。

他方、このときは、

$$E_2 - \frac{A-D}{B} = 2\,\frac{D-\sqrt{AD-BC}}{B} < 0$$

だから、E の動く範囲は、$E_1 < E < E_2$ であることには変わりはない。よって、

$$\frac{C}{D} < E < \frac{A-D}{B} < \frac{A}{B}$$

以上から、

$a_{11} > 0,\ a_{12} < 0,\ q_1 > 0 > q_2.$

$a_{11} - a_{22} > 0$

また前と同様に、$\lambda_1,\ \lambda_2$ はプラスとなる。

これらより、

$$p_i - q_1 = \frac{\lambda_i}{a_{12}} < 0$$

また、

$$p_1 - p_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{a_{12}} < 0,$$

$$p_1 + p_2 = \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}} > 0,$$

$$p_1 p_2 = -\frac{a_{21}}{a_{12}} > 0$$

よって、$p_2 > p_1 > 0$

以上で(A4)が証明された。

（民間部門衰退２ケース）

$$\text{(A5)}\quad \begin{array}{l} \lambda_1 > 0 > \lambda_2, \\ a_{11} < 0,\ a_{12} < 0, \\ 0 > p_2 > q_2 > q_1 > p_1 \end{array}$$

まず、$D < D_1,\ E > E_1$ から、

$E > \dfrac{C}{D} > \dfrac{A}{B}$、

よって、$a_{11} < 0,\ a_{12} < 0,$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0$

ゆえに、$\lambda_1\lambda_2 < 0$、

よって、$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ となり、

$$p_1 - q_1 = \frac{\lambda_1}{a_{12}} < 0,\ \ p_1 < q_1$$

q_1 がマイナスだから、p_1 もマイナスになり、さらに、$p_1p_2 > 0$ だから、p_2 もマイナス、

むろんq_2もマイナスだ。
また、$q_1 - q_2 < 0$から、$q_2 > q_1$。
さらに、

$$\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} = \frac{\lambda_2}{a_{21}} < 0$$ から、$0 > p_2 > q_2$。

以上で、(A5)が証明された。

(空回り・拡大ケース)
(A6)　$\mu > 0, q_1 > q_2, 0 > q_2$

もとの特性方程式の判別式は、

$Z = (A + D - BE)^2 - 4(AD - BC)$だ。
これをEに関する2次関数とみれば、

$$D > D_1 = \frac{BC}{A}$$ のもとで

これがマイナスになるのは、$E_2 < E < E_4$のときだ。このとき、特性根は虚根になり、位相図は空回りを示す。
そのうち、

$$E_2 < E < E_3 = \frac{A+D}{B}$$

のときは、虚根の実部$\mu = A + D - BE$がプラスなので空回りしながら拡大し、$E = E_3$のときは、実部がゼロなので閉じた経路を空回りし、$E_3 < E < E_4$のときは、実部がマイナスなので空回りしながら縮小していく。
$E > E_1$から、$a_{12} < 0$
よって、

$$q_1 - q_2 = -\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{12}a_{21}} > 0$$

以上で、(A6)が証明された。
　なお、$E = E_2$あるいは$E = E_3$のときは、特性根が重根のケースであり、成長・民間部門衰退混合ケースが起こる。表1で混合3、混合4と表示してあるが、詳細は省略する。

(空回り・縮小ケース)
(A7)　$\mu < 0, 0 > q_1 > q_2$

　上に引き続き、このケースでは、$E > E_3$から、さらに$a_{11} < 0$となり、$q_1 < 0$となる。

(衰退ケース)
(A8)　$0 > \lambda_1 > \lambda_2$,
$0 > p_2 > p_1 > q_1 > q_2$

　$E > E_4$となると、再び特性根は実数になる。

$$E > \frac{A+D}{B} > \frac{A}{B} > \frac{C}{D}$$ なので、

$a_{11}, a_{12} < 0, a_{11} + a_{12} < 0$となる。よって、$q_1, q_2$ともにマイナス、特性根もともにマイナスになり、

$$q_1 - q_2 = -\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{12}a_{21}} > 0$$

$$p_i - q_1 = \frac{\lambda_i}{a_{12}} > 0$$

また、

$$p_1 - p_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{a_{12}} < 0,$$

$$p_1 + p_2 = \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}} < 0,$$

$$p_1 p_2 = -\frac{a_{21}}{a_{12}} > 0$$

よって、$0 > p_2 > p_1$。
以上で、(A8)が証明された。

参考文献

以下に本論文を書くに当たって参考にした文献を掲げる。

（第１節）

小島祥一「日本の経済政策過程－その堂々巡りのメカニズム」『帝京経済学研究』第38巻第１号、2004年

（第２節）

Burmeister, Edwin and A.Rodney Dobell, Mathematical Theories of Economic Growth, McMillan, 1970.

（第３節）

Frantz, Roger S., X-Efficiency: Theory, Evidence and Applications (Second Edition) Kluwer Academic Publishers, 1997.

Leibenstein, H., "Allocative Efficiency vs. 'X-Efficiency'," American Economic Review, Vol. 56, June, 1966, 392-415.

Mueller, Dennis C., Public Choice III, Cambridge Univ. Press, 2003.

Olson,Mancur, Jr., The Rise and Decline of Nations: Economic Growth, Stagnation and Social Rigidities, Yale Univ. Press, 1982.

Peden, Edgar A., "Productivity in the United States and Its Relationship to Government Activity: An Analysis of 57 Years, 1929-86," Public Choice 86, December 1991, 153-73.

Zafirovski, Milan, "The Social Construction of Production: An Application of Economic Sociology," M@n@gement, Vol. 5, No. 2, 2002, 147-174.

（第４節）

Ahearne, Alan G. and Naoki Shinada, "Zombie Firms and Economic Stagnation in Japan," Prepared for CGP Program Part (2) conference, Macro/Financial Issues and International Relations: Policy Options for Japan and the United States, Ann Arbor, October 22/23, 2004.

Aoki, Masanao, Hiroshi Yoshikawa and Toshiro Shimizu, "The Long Stagnation and Monetary Policy in Japan: A Theoretical Explanation," Prepared for A Conference in Honor of James Tobin, New School University, New York, Nov. 22-23, 2002.

Emrouznejad, A., "Ali Emrouznejad's DEA Home Page," Warwick Business School, Coventry , UK.

Hayashi, Fumio and Edward C. Prescott, "The 1990s in Japan: A Lost Decade," Review of Economic Dynamics 5, No.1 (Jan. 2002), 206-35.

Krugman, Paul, "It's Baaack! Japan's Slump and the Return of the Liquidity Trap," BPEA,1998.

Mishkin, Frederic S., "Promoting Japanese Recovery," Prepared for the IMF-Kobe University Symposium, Toward the Restoration of Banking Systems in Japan ---Its Global Implications, July 14, 1998.

小林慶一郎、加藤創太『日本経済の罠』日本経済新聞社、2001年。

（おわりに）

ホッフバウアー／シグムント『進化ゲームと微分方程式』現代数学社、2001年

（付録）

Agarwal, Ravi P. and Ramesh C. Gupta,

Essentials of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, 1993.
山口昌哉『非線形現象の数学』朝倉書店、1972.
吉沢太郎『微分方程式入門』朝倉書店、1971.